Lineare Algebra, Prüfung, mit Lösungen

M.Gruber, M.Ruckert

3. Februar 2009, 10:30–12:00, R1.006, R1.007, R1.008, R1.049, R2.007, R3.014 (146)

1. (a) Angenommen, M ist eine symmetrische 3×3-Matrix.
Zuerst addieren Sie das Doppelte von Zeile 2 zu Zeile 3.
Dann addieren Sie das Doppelte von Spalte 2 zu Spalte 3.
Ist das Ergebnis wieder eine symmetrische Matrix?
Lösung Das Ergebnis ist $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, eine symmetrische Matrix.

Antwort ("ja" oder "nein"): $\boxed{\text{ja}}$ *4 P.*

(b) Gegeben ist die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}. \end{bmatrix}$$

Die Spalten von Q sind orthonormal.
Berechnen Sie

$$(QQ^T)^7.$$

Lösung $(QQ^T)^7 = Q(Q^TQ)^6Q^T = QI^6Q^T = QQ^T$ (I die 2×2-Einheitsmatrix).
Es ist $QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$(QQ^T)^7 = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

2. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Führen Sie die Zeilenumformungen durch, die das U der LU-Zerlegung von A liefern.
Welches U erhalten Sie?
Lösung $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U.$

$U = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$ *3 P.*

(b) Welches L ergibt sich hieraus?

Lösung Die nichttrivialen Koeffizienten von L außerhalb der Diagonalen sind: $L_{2,1} = -1, L_{3,2} = -1$.

$$L = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$ *3 P.*

(c) Es soll das Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden.

Es sei bekannt: $L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = b$.

Wie lautet x?

Lösung x löst $Ux = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Rückwärtssubstitution liefert $x = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

$$x = \boxed{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}}$$ *5 P.*

3. Die Gleichung

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

habe die vollständige Lösung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Wie lautet A?

Lösung Wegen $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ ist die zweite Spalte von A das (-2)-Fache der ersten Spalte.

Wegen $A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ ist die dritte Spalte gleich der zweiten, also ebenfalls das (-2)-Fache der ersten Spalte.

Wegen $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ist die Summe von erster und dritter Spalte von A gleich $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Die Summe von erster und dritter Spalte von A ist das (-1)-Fache der ersten Spalte.

Also ist die erste Spalte von A gleich $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

$$A = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -6 & 12 & 12 \end{bmatrix}}$$ *10 P.*

4. Gesucht ist der Projektor P, der auf die von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ aufgespannte Ebene projiziert.

(a) Wie lautet P?

Lösung Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Die Projektionsebene ist $C(A)$.

$P = A(A^T A)^{-1} A^T$.

$(A^T A) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$. $(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$.

$A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$P = \boxed{\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}$$ *7 P.*

(b) Welche Eigenwerte hat P?

Lösung P hat die Eigenwerte 0 (einfach) und 1 (doppelt).

Die Eigenwerte (mit Vielfachheiten) von P sind $\boxed{0, 1, 1}$ *3 P.*

5. Ich gebe eine $(m \times n)$-Matrix A in Mathematica ein. Nach Eingabe von

```
In[2]:= Eigensystem[A]
```

erhalte ich

```
Out[2]= {{3, 3, 0}, {{1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {-1, 1, 1}}}
```

(a) Wie groß sind Zeilenzahl m und Spaltenzahl n von A?

$m, n = \boxed{3, 3}$ *2 P.*

(b) Welche Dimension hat der Nullraum von A?

$\dim N(A) = \boxed{1}$ *2 P.*

(c) Welche Dimension hat der Spaltenraum von A?

$\dim C(A) = \boxed{2}$ *2 P.*

(d) Welche Dimension hat der Zeilenraum von A?

$\dim C(A^T) = \boxed{2}$ *2 P.*

(e) Welche Dimension hat der linke Nullraum von A?

$\dim N(A^T) = \boxed{1}$ *2 P.*

6. In der (t, y)-Ebene sollen die Punkte $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 3/2)\}$ möglichst gut (Kleinste Quadrate) durch die Gerade $y = a + bt$ gefittet werden.

(a) Wie lauten a und b?

Lösung Die (unlösbare) Aufgabe lautet $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Der Kleinste-Quadrate-Ansatz lautet $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Somit ist $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ zu lösen.

Man erhält $a = 5/6$ und $b = 3/4$.

$a, b =$ $\boxed{5/6, 3/4}$ *6 P.*

(b) Wie groß ist die Summe der kleinsten Quadrate?

Lösung $\left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 \\ 3/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1/12 \\ -1/6 \\ 1/12 \end{bmatrix} \right\|^2 = 1/24.$

Summe der kleinsten Quadrate = $\boxed{1/24}$ *4 P.*

7. (a) Angenommen, Q ist eine 3×3-Matrix mit $\operatorname{rank} Q = 1$.
Kann Q drei verschiedene Eigenwerte haben?
Lösung Wenn $\operatorname{rank} Q = 1$ ist, hat Q einen doppelten Eigenwert 0.
Q kann höchstens noch einen weiteren Eigenwert haben.

Antwort ("ja" oder "nein"): $\boxed{\text{nein}}$ *4 P.*

(b) Finden Sie eine Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
A soll keine Diagonalmatrix sein!
Lösung *(Beispiel)* $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mit $a \neq b$

mein $A =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

8. (a) Wie lautet die Matrix F_4 für die diskrete Fouriertransformation?
Lösung $F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix}$ mit $w = i$, also $F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$

$F_4 =$ $\boxed{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}}$ *3 P.*

(b) Zeigen Sie: die zweite und dritte Spalte von F_4 sind orthonormal.
Lösung $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + i \cdot (-1) = 1 + i - 1 - i = 0.$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + i \cdot (-1) = 1 + i - 1 - i = 0}$$ *3 P.*

(c) Berechnen Sie x für

$$F_4 x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung $F_4 x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F_4^* F_4 x = Ix = F_4^* \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$

$x = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}}$ *3 P.*

9. In den Dörfern A und B wohnen zu Beginn gleich viele Menschen. Nun zieht Jahr für Jahr die Hälfte der Einwohner von A nach B (der Rest bleibt) und ein Viertel der Einwohner von B nach A (der Rest bleibt).

   (a) Wie verhält sich die Einwohnerzahl von A zur Einwohnerzahl von B nach einem Jahr?

   Lösung Nach einem Jahr ist das Verhältnis $(1 - 1/2 + 1/4) : (1 - 1/4 + 1/2) = 3 : 5$.

   Die Einwohnerzahlen verhalten sich nach einem Jahr wie $\boxed{3 : 5}$ *2 P.*

   (b) Gegen welchen Grenzwert (Gleichgewicht) strebt das Verhältnis der Einwohnerzahl von A zur Einwohnerzahl von B, wenn es "ewig" so weitergeht?

   Lösung Die Markovsche Übergangsmatrix ist $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$.

   Sei $x \in \mathbf{R}^2$ der Bevölkerungsvektor der Gleichgewichtslage.

   Es gilt $Mx = x$, d.h. x ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.

   Z.B. ist $x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein solcher Eigenvektor. $x_1 : x_2 = 1 : 2$.

   Die Einwohnerzahlen verhalten sich "am Ende" wie $\boxed{1 : 2}$ *8 P.*