Stochastic Processes in Risk and Finance, Prüfung, mit Lösungen

M.Gruber

14.Juli 2009, 13:30–15:00, R 2.007 (8)

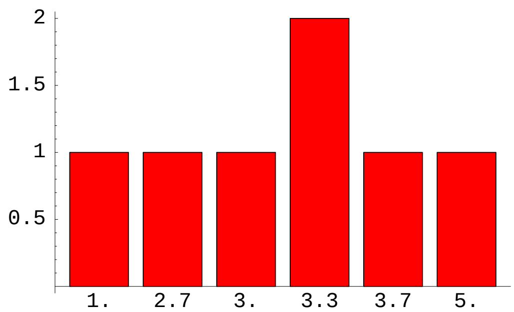

Abbildung 1: Notenstatistik

1. (15 Punkte) *Zeitdiskretes Martingal*

   Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine Filtration, $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ und $X_k = \sum_{0\leq i<k} S_i^2(S_{i+1} - S_i)$.

   Zeigen Sie, dass $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ein Martingal ist.

   Lösung

   - Sei $i < k$.
     $S_i^2(S_{i+1} - S_i)$ ist $\mathcal{F}_k$-messbar wegen der Adaptiertheit von $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$.
     Folglich ist $\mathbf{E}(S_i^2(S_{i+1} - S_i) \mid \mathcal{F}_k) = S_i^2(S_{i+1} - S_i)$.
   - Sei $i = k$.
     $\mathbf{E}(S_k^2(S_{k+1} - S_k) \mid \mathcal{F}_k) = S_k^2\mathbf{E}(S_{k+1} - S_k \mid \mathcal{F}_k)$ ("taking out what is known").
     $\mathbf{E}(S_{k+1} - S_k \mid \mathcal{F}_k) = 0$ wegen der Martingaleigenschaft von $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$.
     Somit ist $\mathbf{E}(S_k^2(S_{k+1} - S_k) \mid \mathcal{F}_k) = 0$.
   - Sei $i > k$.
     $\mathbf{E}(S_i^2(S_{i+1} - S_i) \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(S_i^2(S_{i+1} - S_i) \mid \mathcal{F}_i) \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(0 \mid \mathcal{F}_k) = 0$.
   - $\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(S_k^2(S_{k+1} - S_k) + X_k \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(S_k^2(S_{k+1} - S_k) \mid \mathcal{F}_k) + \mathbf{E}(X_k \mid \mathcal{F}_k) = X_k$ wegen der Additivität der bedingten Erwartung.

2. (15 Punkte) *Stochastisches Kalkül*

   Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, $(W(t))_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(a) Sei $X(t) = e^{-t}W(t)$ für $t \geq 0$.
Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt $(X(t))_{t\geq 0}$?
Welcher Gleichungstyp liegt vor?

(b) Berechnen Sie $\mathbf{E} \int_0^t e^{-s} W(s)\, dW(s)$.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{E}(\int_0^t e^{-s} W(s)\, dW(s))^2$.

Lösung

(a) $dX(t) = -X(t)dt + e^{-t}dW(t)$ (linear im engeren Sinn).

(b) $\mathbf{E} \int_0^t e^{-s} W(s)\, dW(s) = 0$.

(c) $\mathbf{E}(\int_0^t e^{-s} W(s)\, dW(s))^2 = \mathbf{E} \int_0^t e^{-2s} W(s)^2 ds = \int_0^t e^{-2s} \mathbf{E} W(s)^2 ds = \int_0^t e^{-2s} s ds$.
Ausgerechnet: $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1)$.

3. (15 Punkte) *Lösen einer stochastischen Differentialgleichung*

Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$dX(t) = -\tfrac{1}{2}e^{-X(t)}dt + e^{-2X(t)}dW(t), \quad X(0) = 1. \tag{1}$$

Anleitung:

(a) Setzen Sie $X(t) = u(W(t))$ mit einer reellen Funktion u und schreiben Sie

$$d(u(W(t))) = \ldots \tag{2}$$

gemäß Itô-Kalkül hin.
Anmerkung: Auf der rechten Seite von (2) kommen u' und u'' vor. Das ist ok!

(b) Vergleichen Sie die dt- und $dW(t)$-Terme der Gleichungen (1) und (2) und gewinnen Sie daraus eine Differentialgleichung für u:

$$-u'' = \ldots \tag{3}$$

Wie lautet diese Differentialgleichung vollständig?

(c) Die Differentialgleichung (3) hat eine Lösung der Form $u(x) = \frac{1}{12}x^3 + c$ mit $c \in \mathbf{R}$.
Wie lautet daher die Lösung $X(t)$ des Anfangswertproblems (1)?

Lösung

(a) $d(u(W(t))) = \frac{1}{2}u''(W(t))dt + u'(W(t))dW(t)$.

(b) $-u'' = \sqrt{u'}$.

(c) $X(t) = \frac{1}{12}W(t)^3 + 1$.

4. (15 Punkte) *Black-Scholes*

Seien

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \text{ mit } S(0) = s_0, \\ dB(t) &= rB(t)dt \text{ mit } B(0) = 1, \\ C(t) &= \phi(t)S(t) + \psi(t)B(t) \text{ mit } C(0) = 1000 \end{aligned}$$

mit *stock process* $(S(t))_{t\geq 0}$, *bond process* $(B(t))_{t\geq 0}$, Portfoliowert $(C(t))_{t\geq 0}$ und Portfolioprozessen $(\phi(t))_{t\geq 0}$ und $(\psi(t))_{t\geq 0}$.

Es sei $\phi(t) = 10 + t$.

Wie muss $\psi(t)$ gewählt werden, damit das Portfolio selbstfinanzierend ist, d.h.

$$dC(t) = \phi(t)dS(t) + \psi(t)dB(t)$$

gilt?

Lösung Es muss gelten:

$$\begin{aligned} dC(t) &= \phi(t)dS(t) + S(t)d\phi(t) + \psi(t)dB(t) + B(t)d\psi(t) \\ &= \phi(t)dS(t) + \psi(t)dB(t), \end{aligned}$$

folglich

$$0 = S(t)d\phi(t) + B(t)d\psi(t)$$

und damit $(d\phi(t) = dt)$

$$d\psi(t) = -B(t)^{-1}S(t)dt.$$

Wegen

$$C(0) = \phi(0)S(0) + \psi(0)B(0)$$

gilt

$$\psi(0) = 1000 - 10s_0$$

und damit

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 1000 - 10s_0 - \int_0^t B(u)^{-1}S(u)du \\ &= 1000 - 10s_0 - \int_0^t e^{\sigma W(u)+(\mu-\sigma^2/2-r)u}du. \end{aligned}$$

5. (15 Punkte) *Vasicek-Gleichung*

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))dt + \sigma dW(t), \quad R(0) = 0$$

unter den speziellen Bedingungen $\alpha/\beta = 0.06$ und $\sigma^2/\beta = 2 \cdot 10^{-4}$.

Wie ist $R(T)$ für $T = (\ln 2)/\beta$ verteilt (Erwartungswert, Varianz, Verteilungstyp)?

Lösung

(a) Erwartungwert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}R(T) &= R(0)e^{-\beta T} + (1 - e^{-\beta T}) \cdot \tfrac{\alpha}{\beta} \\ &= 0 \cdot e^{-\beta T} + (1 - e^{-\beta((\ln 2)/\beta)}) \cdot \tfrac{\alpha}{\beta} \\ &= (1/2) \cdot 0.06 \\ &= 0.03. \end{aligned}$$

(b) Varianz:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} R(T) &= \tfrac{\sigma^2}{2\beta} \cdot (1 - e^{-2\beta T}) \\ &= 10^{-4} \cdot \tfrac{3}{4} \\ &= 0.000075.\end{aligned}$$

(c) Verteilungstyp: Normalverteilung.

6. (15 Punkte) *Girsanov-Transformation*

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, $(W(t))_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Der Prozess $X = (X(t))_{t\in[0,T]}$ sei definiert durch $X(t) = \mu t + W(t)$ mit $\mu \neq 0$.

(a) X ist kein P-Martingal. Warum nicht?

(b) Mit der Girsanov-Transformation kann man zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ und einer Brownschen Bewegung $\tilde{W} = (\tilde{W}(t))_{t\geq 0}$ übergehen, so dass X zu einem $\tilde{P}$-Martingal wird.

  i. Wie kann man $\tilde{W}$ mit Hilfe von W darstellen?

  ii. Wie kann man $\tilde{P}(A)$ für ein $A \in \mathcal{F}(t)$ als Erwartungswert bezüglich P darstellen?

Lösung

(a) Sei $s < t$: $\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}(s)) = \mathbf{E}(\mu t + W(t) \mid \mathcal{F}(s)) = \mu t + W(s) \neq \mu s + W(s)$.

(b) i. $\tilde{W}(t) = W(t) + \mu t$.

  ii. $\tilde{P}(A) = \mathbf{E} 1_A e^{-\mu W(t) - (1/2)\mu^2 t}$.