Poisson-Verteilung $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$

Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

für $x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \quad \checkmark$$

Momente:

momentenerzeugende Funktion

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= E e^{uX} \\
&= \sum_{x \in \mathbb{N}} e^{ux} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{(e^u \lambda)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} e^{e^u \lambda} = e^{\lambda(e^u - 1)}
\end{aligned}$$

$$\varphi'(u) = E X e^{uX}, \quad \varphi'(0) = EX$$

$$\frac{d}{du} e^{\lambda(e^u - 1)} = e^{\lambda(e^u - 1)} \cdot \lambda e^u = \lambda e^{\lambda(e^u - 1) + u}$$

$$\left. \frac{d}{du} e^{\lambda(e^u - 1)} \right|_{u=0} = \lambda \qquad \Rightarrow \quad EX = \lambda$$

$$\varphi''(u) = EX^2 e^{uX}$$

$$\varphi''(0) = EX^2$$

$$\frac{d^2}{du^2} e^{\lambda(e^u-1)} = \lambda e^{\lambda(e^u-1)+u} (\lambda e^u + 1)$$

$$\frac{d^2}{du^2} e^{\lambda(e^u-1)}\Big|_{u=0} = \lambda(\lambda+1) \quad \Rightarrow \quad EX^2 = \lambda(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow \sigma^2(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

$$\Rightarrow \sigma^2(X) = \lambda .$$

Verteilung einer Summe unabhängiger $\mathcal{P}(\lambda)$-verteilter ZVen:

$Y = X_1 + \ldots + X_n$ mit $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Rightarrow e^{uX_1}, \ldots, e^{uX_n}$ unabhängig

momenterzeugende Funktion:

$$\varphi(u) = Ee^{uY} = Ee^{u(X_1+\ldots+X_n)}$$

$$= (Ee^{uX_1}) \cdot (Ee^{uX_2}) \ldots (Ee^{uX_n})$$

$$= e^{\lambda_1(e^u-1)} e^{\lambda_2(e^u-1)} \ldots e^{\lambda_n(e^u-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)(e^u-1)}$$

$$\Rightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$

→ Wikipedia (english) Poisson distribution

(B) Straßen Kreuzung,

im Durchschnitt kommen innerhalb von 10 sec zwei Autos an.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen in der nächsten Minute mehr als 10 Autos an?

$\lambda = 12$ (Autos pro Minute), $X \sim \mathcal{P}(12)$

gesucht $P(X > 10)$

$$= 1 - P(X \leq 10)$$

$$= 1 - e^{-12} \sum_{x \leq 10} \frac{12^x}{x!}$$

$$= 1 - 0.347229$$

$$\approx 0.6528$$

Mathematica:

```
<< Statistics`DiscreteDistributions`
pdist = PoissonDistribution[12]
CDF[pdist,10]
out: GammaRegularized[11,12]
N[%]
out: 0.347229
```

Normalverteilung

$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Dichte $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

μ: Mittelwert, σ: Standardabweichung

Standard-Normalverteilung

$\mathcal{N}(0,1)$ Dichte $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x \leq y] \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = w$$

$$\frac{1}{\sigma} dx = dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \underset{\text{tabelliert}}{\mathcal{N}(0,1)}$$

Momentenerzeugende Funktion:

$$\varphi(u) = e^{\mu u + \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Momente: $\varphi'(u) = \varphi(u)\,(\mu + \sigma^2 u)$

$$\varphi'(0) = \mu$$

$$\varphi''(u) = \varphi'(u)\,(\mu + \sigma^2 u) + \varphi(u)\,\sigma^2$$

$$\varphi''(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} X &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\varphi'''(u) = \varphi''(u)\,(\mu + \sigma^2 u) + \varphi'(u)\,\sigma^2 + \varphi'(u)\,\sigma^2$$

$$\begin{aligned} \varphi'''(0) &= (\mu^2 + \sigma^2)\,\mu + 2\mu\sigma^2 \\ &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \end{aligned}$$

$\vdots$

→ Wikipedia (engl.) Normal distribution

Verteilung einer Summe normalverteilter unabhängiger ZVn:

Seien $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \ldots, X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$

$Y = X_1 + \ldots + X_n$

$$
\begin{aligned}
\varphi(u) &= E e^{uY} \\
&= E e^{u(X_1 + \ldots + X_n)} \\
&= E e^{uX_1} \cdot e^{uX_2} \ldots e^{uX_n} \\
&\underset{\text{unabh.}}{=} (E e^{uX_1})(E e^{uX_2}) \ldots (E e^{uX_n}) \\
&= \left(e^{\mu_1 u + \frac{\sigma_1^2 u^2}{2}}\right)\left(e^{\mu_2 u + \frac{\sigma_2^2 u^2}{2}}\right) \ldots \left(e^{\mu_n u + \frac{\sigma_n^2 u^2}{2}}\right) \\
&= e^{(\mu_1 + \ldots + \mu_n) u + \frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}{2} u^2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad Y \sim N\left(\mu_1 + \ldots + \mu_n, \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}\right)$

$\boxed{\text{Summen unabh. normalvert. Größen sind normalverteilt.}}$

B (Skript) $X \sim N(65, 1)$ (Körpergröße ♀)
$Y \sim N(68, 2)$ (" ♂)

$P(X > Y) = P(\underbrace{X - Y}_{Z} > 0)$. $Z \sim N(65-68, \sqrt{1^2 + 2^2}) = N(-3, \sqrt{5})$

$$P(Z>0) = P\Big(\underbrace{\frac{Z-(-3)}{\sqrt{5}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \underbrace{\frac{3}{\sqrt{5}}}_{1.342}\Big) = 1 - \underbrace{\Phi(1.342)}_{0.9102}$$

$$= 0.0898$$

(statistischer Internetrechner od. Tabelle)

Zentraler Grenzwertsatz

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabh., $EX_i = 0$, $\sigma^2(X_i) = \sigma^2$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{P\Big(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < a\Big)}_{} = \Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$P\Big(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{1}{n} S_n < a\Big)$$

Bem.: Über den Verteilungstyp der X_i wird hier nichts gesagt. Es müssen nur die ersten beiden Momente existieren.