1. ([1], Sec.3.8, Ex.3) X habe die Dichte $f(x) = \frac{x}{2} \cdot [0 < x < 2]$.

   Welche Dichte und Verteilungsfunktion hat $Y = X(2 - X)$?

   Lösung Die Transformation ist $r :]0, 2[\to]0, 1[, x \mapsto x(2-x)$. Sie ist nur stückweise monoton. Auf $]0, 1]$ hat sie die Umkehrfunktion $y \mapsto 1 - \sqrt{1-y}$, auf $[1, 2[$ die Umkehrfunktion $y \mapsto 1 + \sqrt{1-y}$.

   Für $y \in]0, 1[$ gilt

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= 1 - P(Y > y) \\ &= 1 - P(r(X) > y) \\ &= 1 - P(1 - \sqrt{1-y} < X < 1 + \sqrt{1-y}) \\ &= 1 - \int_{1-\sqrt{1-y}}^{1+\sqrt{1-y}} f(t)\, dt, \end{aligned}$$

   also ist

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dy} P(Y \leq y) &= \tfrac{d}{dy}(1 - F(1 + \sqrt{1-y}) + F(1 - \sqrt{1-y})) \\ &= f(1 + \sqrt{1-y}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1-y)^{-1/2} + f(1 - \sqrt{1-y}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (1-y)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-y}}. \end{aligned}$$

   Die gesuchte Dichte ist $y \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1-y}} \cdot [0 < y < 1]$.

2. ([1], Sec.3.8, Ex.7) Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$.

   Welche Dichten haben

   (a) X^2,

   (b) $-X^3$,

   (c) $X^{1/2}$?

   Lösung X hat die Dichte $x \mapsto [0 < x < 1]$.

   (a) Die Transformation ist $r :]0, 1[\to]0, 1[, x \mapsto x^2$.
   Sie hat die Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt{y}$ mit der Ableitung $y \mapsto \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2}$.
   Die gesuchte Dichte ist $y \mapsto \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} \cdot [0 < y < 1]$.

   (b) Die Transformation ist $r :]0, 1[\to] - 1, 0[, x \mapsto -x^3$.
   Sie hat die Umkehrfunktion $y \mapsto -\sqrt[3]{y}$ mit der Ableitung $y \mapsto -\frac{1}{3} \cdot y^{-2/3}$.
   Die gesuchte Dichte ist $y \mapsto \frac{1}{3} \cdot |y^{-2/3}| \cdot [-1 < y < 0]$.

(c) Die Transformation ist $r :]0,1[\to]0,1[, x \mapsto \sqrt{x}$.

Sie hat die Umkehrfunktion $y \mapsto y^2$ mit der Ableitung $y \mapsto 2y$.

Die gesuchte Dichte ist $y \mapsto 2y \cdot [0 < y < 1]$.

3. ([1] Sec.3.8, Ex.11) Sie haben einen Zufallszahlengenerator, der auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt.

   Wie könne Sie damit Zufallszahlen mit der Dichte $g(y) = \frac{1}{2} \cdot (2y+1) \cdot [0 < y < 1]$ erzeugen?

   Lösung Die Verteilungsfunktion von Y sei F. Die Zufallsvariable $X = F(Y)$ ist auf $[0,1]$ gleichverteilt. Andersherum betrachtet: Die Zufallsvariable $F^{-1}(X)$ hat die "Wunschverteilung" F, wenn X auf $[0,1]$ gleichverteilt ist. Es geht also vor allem darum, die Umkehrung von F zu finden.

   Für $y \in]0,1[$ ist $F(y) = \int_0^y \frac{1}{2}(2w+1)\,dw = \frac{1}{2}y(y+1)$. $F :]0,1[\to]0,1[$. $F^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}$. Wenn X gleichverteilt auf $]0,1[$ ist, hat die Zufallsvariable $Y = F^{-1}(X) = \frac{-1+\sqrt{1+8X}}{2}$ die gewünschte Verteilung.

4. ([1] Sec.3.8, Ex.8) X habe die Dichte $f(x) = e^{-x} \cdot [x > 0]$.

   Welche Dichte hat $Y = X^{1/2}$?

   Lösung Die Transformation ist $r : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+, x \mapsto \sqrt{x}$.

   Sie hat die Umkehrfunktion $y \mapsto y^2$ mit der Ableitung $y \mapsto 2y$.

   Die gesuchte Dichte ist $y \mapsto 2ye^{-y^2}[0 < y]$.

5. ([1] Sec.3.8, Ex.2) X nehme jeden der Werte $-3,-2,-1,0,1,2,3$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit an.

   Welche Wahrscheinlichkeitsfunktion hat $Y = X^2 - X$?

   Lösung Wertetabellen für X und Y:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$Y = X^2 - X$	12	6	2	0	0	2	6

   Wahrscheinlichkeitsfunktion für Y:

$$P(Y=i) = \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{für} \quad i \in \{0,2,6\} \\ \frac{1}{7} & \text{für} \quad i = 12 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Literatur

[1] Morris H. DeGroot and Mark J. Schervish. *Probability and Statistics*. Addison Wesley, third edition, 2002.