Diskrete Mathematik

Erwartungswert II

→ MIT OCW 6.042 / 18.062 (LN May 5, 2005)
B (für "Erwartungswert ∞".)

Situation: $X, Y_1, Y_2, \ldots : S \to \mathbb{N}$ ZVn

unabhängig (gegenseitig)

"identisch verteilt": $\forall_{i,k} \; P(X=k) = P(Y_i = k)$

Betrachte $A = \min\{k \mid \max(Y_1, \ldots, Y_k) > X\}$

A ist ZV.

Gesucht: $E(A)$

Interpretation: Wie lange dauert es durchschnittlich, bis ein Y_i größer als X ist?

Wir wissen: $E(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n\, P(A=n)$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A > n) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \infty$$

$P(A>n) \geq \frac{1}{n+1}$, denn $P(A>n) = P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leq X)$

und $P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leq X) = P(\max(X, Y_2, \ldots, Y_n) \leq Y_1) = \ldots$

$\ldots = P(\max(Y_1, \ldots, Y_{n-1}, X) \leq Y_n)$ und die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist mindestens 1.

B (fairer Würfel mit n Seiten)

Wie lange muss man im Mittel würfeln, bis alle n Augenzahlen erschienen sind?

z.B. $n=6$

$$\underline{2} \mid \underline{3} \mid 2 \ \underline{1} \mid 1 \ \underline{4} \mid 3 \ 2 \ 2 \ 4 \ \underline{5} \mid 1 \ 4 \ \underline{6} \mid$$

$$X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_{n-1}$$

X_k : Länge des k-ten Abschnitts ($k=0,\dots,n-1$)

Anzahl der benötigten Versuche:

$$T = X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}$$

Im Mittel braucht man

$$E(T) = E(X_0) + E(X_1) + \dots + E(X_{n-1})$$

Versuche.

Was ist $E(X_k)$?

$$E(X_k) = \sum_{i\in\mathbb{N}} i\, P(X_k = i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{P(X_k > i)}_{\left(\frac{k}{n}\right)^i} = \frac{1}{1-\frac{k}{n}} = \frac{n}{n-k}$$

Also ist $E(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1}\right) = n H_n$

$$E(T) = n H_n$$
$$\approx n \ln n$$

$n = 6: \quad 6 H_6 \approx 14.7$

$n = 365: \quad 365 H_{365} \approx 2364.6$

B (2 faire Würfel)

R_1, R_2 unabhängig:

$$E(R_1 R_2) = E\big(1 \cdot [R_1 = 1] + 2 \cdot [R_1 = 2] + \ldots + 6 \cdot [R_1 = 6]\big) \cdot$$
$$\cdot \big(1 [R_2 = 1] + 2 \cdot [R_2 = 2] + \ldots + 6 \cdot [R_2 = 6]\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} i \cdot j \, \underbrace{P(R_1 = i, R_2 = j)}_{E([R_1 = i][R_2 = j])}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{6} i \cdot P(R_1 = i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{6} j \, P(R_2 = j) \right)$$
$$= (E R_1) \cdot (E R_2) = \frac{49}{4}$$

Generell gilt für (gegenseitig) unabhängige ZVn $R_1, \ldots, R_n$:

$$\boxed{E(R_1 \cdots R_n) = (E R_1) \cdots (E R_n)}$$

Falscher Satz : $E\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{E(R)}$

Gegen-B : fairer Würfel :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}\cdot\frac{1}{6} \neq \frac{2}{7}$$

$$= \frac{60+30+20+15+12+10}{60}$$

$$\frac{147}{60}\cdot\frac{1}{6} \neq \frac{2}{7}$$

noch ein

Falscher Satz : $E\left(\frac{R}{T}\right) > 1 \Rightarrow E(R) > E(T)$

Gegen-B

$R : S \to \{0, 2\}$

$R(s_1) = 0, \; R(s_2) = 2 \qquad E(R) = 1$

$P(R=0) = P(R=2) = \frac{1}{2}$

$T : S \to \{10^{-6}, 3\}$

$T(s_1) = 3 \;, \; T(s_2) = 10^{-6}$

$P(T=3) = P(T=10^{-6}) = \frac{1}{2} \qquad E(T) \approx \frac{3}{2}$

$$E\left(\frac{R}{T}\right) = \frac{0}{3}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 10^{6}\cdot\frac{1}{2} = 10^{6}$$

B (RISC-Paradox)

Benchmark	RISC	CISC	CISC / RISC
Problem 1	150	120	0.8
2	120	180	1.5
3	150	300	2.0
4	2800	1400	0.5
Durchschnitt			1.2

Schluss: CISC-Programme sind 20% länger als RISC-Programme

$E(R) = 805$

also ist

$E(R) = 1.61 \cdot E(C)$

$E(C) = 500$

$E\left(\frac{C}{R}\right) = 1.2 \not\Rightarrow E(C) = 1.2\, E(R)$

Bedingte Erwartung

R ZV
~~A~~ Event

$$E(R \mid A) = \sum_{\omega \in S} R(\omega)\, P(\omega \mid A)$$

B R fairer Würfel
A "gerade Zahl".

$$E(R \mid A) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \tfrac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \tfrac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$= 4$$

Satz: $A_1, \ldots, A_n$ disjunkte Zerlegung von S,
R ZV

Dann: $E(R) = E(R \mid A_1) P(A_1) + \cdots + E(R \mid A_n) P(A_n)$

B (wie oben),

$$E(R) = E(R \mid A)\, P(A) + E(R \mid A^c)\, P(A^c)$$

$$= \left(2 \cdot \tfrac{1}{3} + 4 \cdot \tfrac{1}{3} + 6 \cdot \tfrac{1}{3}\right) \cdot \tfrac{1}{2} + \left(1 \cdot \tfrac{1}{3} + 3 \cdot \tfrac{1}{3} + 5 \cdot \tfrac{1}{3}\right) \cdot \tfrac{1}{2}$$