

Diskrete Mathematik, Prüfung, mit Lösungen

M.Gruber

21.Juli 2009, 10:30–12:00, R0.005, R1.008, R3.014 (47)

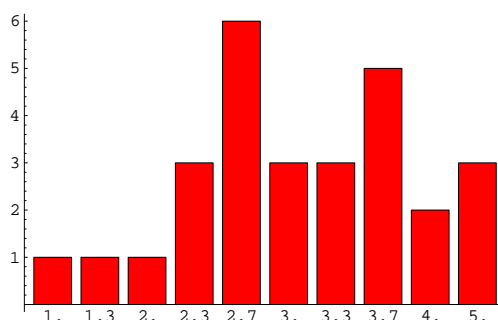


Abbildung 1: Notenstatistik

1. (10 Punkte) *Abzählbarkeit*

Die Punkte $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kann man folgendermaßen durch eine Funktion F bijektiv auf \mathbb{N} abbilden: $(0, 0) \mapsto 0$, $(0, 1) \mapsto 1$, $(1, 0) \mapsto 2$, $(0, 2) \mapsto 3$, $(1, 1) \mapsto 4$, $(2, 0) \mapsto 5$, $(0, 3) \mapsto 6$, $(1, 2) \mapsto 7$ usw.

Geben Sie $F((m, n))$ in geschlossener Form an!

Tipp: $F((m, n)) = (\text{Anzahl der Punkte } (a, b) \in G \text{ mit } a + b < m + n) + m$.

Lösung

$$F((m, n)) = (m + n)(m + n + 1)/2 + m.$$

2. (10 Punkte) *Lineare Rekursion*

Finden Sie eine geschlossene Form für folgende Rekursion:

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f(n) = 4f(n - 1) - f(n - 2).$$

Lösung

Es handelt sich um ein homogenes Problem.

Die charakteristische Gleichung $x^2 = 4x - 1$ hat die Lösungen $2 \pm \sqrt{3}$.

Die allgemeine Lösung lautet $f(n) = c_1(2 + \sqrt{3})^n + c_2(2 - \sqrt{3})^n$.

Die Randwerte $f(0) = c_1 + c_2$, $f(1) = c_1(2 + \sqrt{3}) + c_2(2 - \sqrt{3})$ liefern $c_1 = c_2 = 1/2$.

Die Lösung lautet somit: $f(n) = (1/2)(2 + \sqrt{3})^n + (1/2)(2 - \sqrt{3})^n$.

3. (10 Punkte) *Größter gemeinsamer Teiler*

Stellen Sie den $\text{ggT}(98182, 14028)$ in der Form $s \cdot 98182 + t \cdot 14028$ mit $s, t \in \mathbf{Z}$ dar.

Lösung
$$\begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 98182 \\ 14028 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 98182 \\ 14028 \end{bmatrix}.$$

$\text{ggT}(98182, 14028) = (-1) \cdot 98182 + 7 \cdot 14028 = 14.$

4. (10 Punkte) *Modulare Invertierbarkeit*

Wir betrachten \mathbf{Z}_{6783} mit der Multiplikation "modulo" 6783. Bezeichnen wir die Multiplikation mit \otimes . Wir interessieren uns für die invertierbaren Elemente von \mathbf{Z}_{6783} . Z.B. sind 2 und 3392 invertierbar: $2 \otimes 3392 = 1$.

Wieviele invertierbare Elemente enthält \mathbf{Z}_{6783} ?

Typ: $6783 = 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19$.

Lösung

\mathbf{Z}_{6783}^* enthält $\varphi(6783) = 2 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 18 = 3456$ Elemente. (φ ist das "Eulersche Phi".)

5. (10 Punkte) *Graphen*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Ecken $V = \{v_1, \dots, v_7\}$ und Kanten

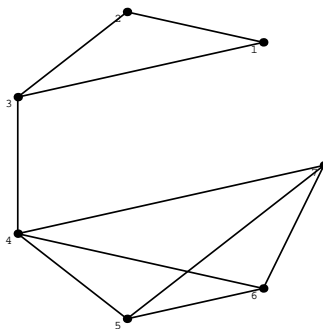
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_6, v_7\}\}.$

- (a) Ist G zusammenhängend?
- (b) Gibt es eine Eulertour in G ?
- (c) Enthält G einen Spannbaum (*spanning tree*) als Subgraphen?

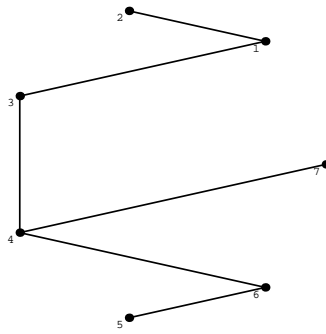
Hinweis: Kurze Begründungen Ihrer Antworten!

Lösung

- (a) Ja. Von jeder Ecke gibt es einen Pfad zu jeder anderen Ecke:



- (b) Nein. Es gibt Ecken mit ungeradem Eckengrad.
- (c) Ja. Ein *spanning tree* ist z.B.



6. (10 Punkte) *Erzeugendenfunktion*

Es gibt vier Sorten Doughnuts zu kaufen: *chocolat*, *lemon-filled*, *sugar* und *glazed*.

Sie kaufen 20 Doughnuts.

Wieviele Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es?

Lösung

Erzeugendenfunktion: $F(x) = (1 - x)^{-4}$.

$$F^{(20)}(x) = 4 \cdot 5 \cdots 23 \cdot (1 - x)^{-24}.$$

$$F^{(20)}(0)/20! = (23!/3!)/20! = 23 \cdot 22 \cdot 21/6 = 1771.$$

Dies ist die Anzahl der Möglichkeiten.

7. (10 Punkte) *Taubenschlag-Prinzip*

Behauptung: Die Menge $\{3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{100}\}$ enthält zwei Zahlen, deren Differenz durch 100 teilbar ist.

Ist diese Behauptung wahr oder falsch?

Hinweis: Antwort mit kurzer Begründung.

Lösung

Wahr. Betrachte $3^0 \bmod 100, 3^1 \bmod 100, 3^2 \bmod 100, \dots, 3^{100} \bmod 100$. Von diesen 101 Zahlen fallen mindestens zwei zusammen. Es gibt also $1 \leq l < k \leq 100$ mit $3^k \bmod 100 = 3^l \bmod 100$. Also ist $(3^k - 3^l) \bmod 100 = 0$.

8. (10 Punkte) *Wahrscheinlichkeit*

Sie haben zwei Würfel, einen fairen und einen unfairen. Sie werfen beide gleichzeitig.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Augenzahlen übereinstimmen?

Lösung

Sei X der faire Würfel, Y der unfaire. X und Y sind unabhängig.

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{1 \leq i \leq 6} P(X = i, Y = i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 6} P(X = i)P(Y = i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 6} (1/6) \cdot P(Y = i) \\ &= (1/6) \cdot \sum_{1 \leq i \leq 6} P(Y = i) \\ &= 1/6. \end{aligned}$$

9. (10 Punkte) *Erwartungswert*

Sie haben zwei faire Würfel. Sie werfen die beiden Würfel gleichzeitig und zwar so oft, bis die Augenzahlen der beiden Würfel übereinstimmen.

Wie oft müssen Sie im Mittel werfen?

Lösung

Seien X_i und Y_i die Würfelresultate beim i -ten Versuch.

Sei $I = \min\{i \mid X_i = Y_i\}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}I &= \sum_{0 \leq i < \infty} i \cdot P(I = i) \\ &= \sum_{0 \leq i < \infty} P(I > i) \\ &= \sum_{0 \leq i < \infty} (5/6)^i \\ &= 6. \end{aligned}$$