Übungsblatt 12, Lösungen

① (a) $$E(R) = \sum_{\omega=1}^{12} R(\omega)\, P(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega=1}^{12} (\omega \bmod 5) \cdot \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(1+2+3+4+0+1+2+3+4+0+1+2)$$

$$= \frac{1}{12}(3\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4)$$

$$= \frac{23}{12}$$

(b) $$E(R) = \sum_{k=0}^{4} k \cdot P(R=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{4} P(R>k)$$

$$= \underbrace{\frac{10}{12}}_{P(R>0)} + \underbrace{\frac{7}{12}}_{P(R>1)} + \underbrace{\frac{4}{12}}_{P(R>2)} + \underbrace{\frac{2}{12}}_{P(R>3)}$$

$$= \frac{23}{12}$$

② $W_1, W_2, \ldots$ Würfel-Experimente unabhängig $\qquad W_i : \underbrace{\{1,\ldots,8\}}_{S} \to \{1,\ldots,8\}$

$W_i(\omega) = \omega$

Anzahl Würfe, bis 7 erscheint: $N = \min\{k \mid W_k = 7\}$

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(N>k)}_{\left(\frac{7}{8}\right)^k} = \frac{1}{1-\frac{7}{8}} = 8$$

Übungsblatt 12, Lösungen

③ (a) Es gilt immer $E(c\cdot R) = c\,E(R)$

(b) Es gilt immer $E(R+S) = E(R)+E(S)$

(c) Wenn R und S unabhängig sind, gilt $E(R\cdot S) = E(R)\cdot E(S)$

④ (a) $B = \underbrace{B_1}_{\text{Blatt 1}} + \underbrace{B_2}_{\text{Blatt 2}} + \underbrace{B_3}_{\text{Blatt 3}}$

Bearbeitungszeit

$$E(B) = E(B_1) + E(B_2) + E(B_3)$$
$$= \left(1\cdot\tfrac{2}{3}+2\cdot\tfrac{1}{3}\right) + \left(1\cdot\tfrac{2}{3}+2\cdot\tfrac{1}{3}\right) + \left(1\cdot\tfrac{2}{3}+2\cdot\tfrac{1}{3}\right)$$
$$= 3\cdot\tfrac{4}{3} = 4$$

(b) $W_1, W_2, \dots$ Würfel-Experimente unabhängig $\qquad W_i : \{1,\dots,6\} \to \{1,\dots,6\}$, $W_i(\omega) = \omega$

Anzahl Experimente, bis 1 erscheint:

$N = \min\{k \mid W_k = 1\}$ (Zufallsvariable!)

Anzahl Tage, um die das Waschen aufgeschoben wird:

$R = N - 1$

$$E(R) = E(N-1) = E(N) - 1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot P(N=k)\right) - 1$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(N>k)}_{\left(\frac{5}{6}\right)^k}\right) - 1 = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} - 1 = 5$$

(c) W_1, W_2 unabh. faire Würfel

$$U = W_1 \cdot W_2$$

$$E(U) = E(W_1) \cdot E(W_2) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

(d) $D = B \cdot [\text{fleißiger Student}] + R \cdot [\text{entspannter Student}] + U \cdot [\text{ungl. Student}]$

$P(\text{fleißiger Student}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{entspannter Student}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{unglücklicher Student}) = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} E(D) &= E(D \mid \text{fleißiger Stud.}) \cdot P(\text{fleißiger Stud.}) \\ &\quad + E(D \mid \text{entspannter Stud.}) \cdot P(\text{entspannter Stud.}) \\ &\quad + E(D \mid \text{ungl. Stud.}) \cdot P(\text{ungl. Stud.}) \\ &= E(B) \cdot P(\text{fleißiger Stud.}) + E(R) \cdot P(\text{entspannter Stud.}) \\ &\quad + E(U) \cdot P(\text{ungl. Stud.}) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{137}{4} \end{aligned}$$

5 → Assignments, Problem Set 11, Questions & Solutions