

Die nachfolgenden Aufgaben stammen aus *6.042J / 18.062J Mathematics for Computer Science, Spring 2005 (MIT OpenCourseWare), Problem Set 11*.

1. Sie haben einen fairen Würfel mit den Seiten $1, \dots, 12$. Die Zufallsvariable R sei der Rest, den man bei Division des Würfelergbnisses durch 5 erhält. Welchen Erwartungswert hat R ?
 - (a) Schreiben Sie den Erwartungswert, indem Sie über alle möglichen Würfelergbnisse summieren.
 - (b) Schreiben Sie den Erwartungswert, indem Sie über den Wertebereich von R summieren.
2. Sie werfen einen fairen Würfel mit den Seiten $1, \dots, 8$ so lange, bis eine 7 erscheint. Sei N die Anzahl der Versuche, die Sie benötigen. Welchen Erwartungswert hat N ?
3. Den Erwartungswert einer Zufallsvariablen erhält man oft durch Berechnung von Erwartungswerten einfacherer Zufallsvariablen. Schreiben Sie jeden der nachfolgenden Ausdrücke mit Hilfe von $\mathbf{E}R$ und $\mathbf{E}S$. Notieren Sie, welche Bedingungen R und S erfüllen müssen, damit Ihre Gleichungen gelten.
 - (a) $\mathbf{E}(cR)$ (c ist eine Konstante).
 - (b) $\mathbf{E}(R + S)$.
 - (c) $\mathbf{E}(R \cdot S)$.
4. MIT-Studenten schieben manchmal das Waschen ein paar Tage auf. Gehen Sie davon aus, dass alle Zufallsvariablen im Folgenden unabhängig sind.
 - (a) Ein fleißiger Student löst drei Aufgabenblätter, bevor er wäscht. Jedes Aufgabenblatt beschäftigt ihn 1 Tag mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ und 2 Tage mit Wahrscheinlichkeit $1/3$.
Sei B die Anzahl Tage, die ein fleißiger Student das Waschen aufschiebt. Wie groß ist $\mathbf{E}B$?
 - (b) Ein entspannter Student wirft morgens einen fairen Würfel mit den Seiten $1, \dots, 6$. Wenn eine 1 erscheint, wäscht er sofort (0 Tage Aufschub). Andernfalls schiebt er das Waschen auf und wiederholt am nächsten Tag das Experiment.
Sei R die Anzahl Tage, die ein entspannter Student das Waschen aufschiebt. Wie groß ist $\mathbf{E}R$?
 - (c) Ein unglücklicher Student, der krank ist, muss sich erst erholen (was so lange dauert wie das Produkt zweier fairer Würfel mit den Seiten $1, \dots, 6$).
Sei U die Anzahl Tage, die ein unglücklicher Student das Waschen aufschiebt. Wie groß ist $\mathbf{E}U$?

- (d) Ein Student ist mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ fleißig, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ entspannt und mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ unglücklich.

Sei D die Anzahl Tage, die ein Student das Waschen aufschiebt. Wie groß ist ED ?

5. Sie haben zwölf Karten

1	1
---	---

2	2
---	---

3	3
---	---

4	4
---	---

5	5
---	---

6	6
---	---

.

Sie mischen die Karten und legen sie in einer Reihe auf, z.B. so

1	2	3	3	4	6	1	4	5	5	2	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

.

In dieser Anordnung gibt es zwei Paare, nämlich ein Dreier- und ein Fünferpaar.

Wie groß ist die zu erwartende Anzahl von Paaren?