1. Die Funktion g sei durch die Rekursion

$$\begin{aligned} g(1) &= \alpha \\ g(n+1) &= g(n) + (-1)^n \beta \end{aligned}$$

gegeben. Für g gibt es eine Darstellung $g(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta$. Wie lauten $A(n)$ und $B(n)$?

Lösung *1.Ansatz* $g(n) = 1 \, \forall_n$.

$g(1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$.

$g(n+1) = g(n) + (-1)^n\beta \Rightarrow 1 = 1 + (-1)^n\beta \Rightarrow \beta = 0$.

$g(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta \Rightarrow 1 = A(n) \cdot 1 + B(n) \cdot 0 \Rightarrow A(n) = 1 \, \forall n$.

2.Ansatz $g(n) = (-1)^n$.

$g(1) = -1 \Rightarrow \alpha = -1$.

$g(n+1) = g(n) + (-1)^n\beta \Rightarrow (-1)^{n+1} = (-1)^n + (-1)^n\beta \Rightarrow \beta = -2$.

$g(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta \Rightarrow (-1)^n = A(n) \cdot (-1) + B(n) \cdot (-2) = -1 - 2B(n)$

$\Rightarrow B(n) = \frac{1}{2}((-1)^{n+1} - 1)$.

Geschlossene Form: $g(n) = \alpha + \frac{1}{2}((-1)^{n+1} - 1)\beta$.

2. Die Funktion h sei durch die Rekursion

$$\begin{aligned} h(1) &= \alpha \\ h(n+1) &= h(n) + (-1)^n n\beta \end{aligned}$$

gegeben. Für h gibt es eine Darstellung $h(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta$. Wie lauten $A(n)$ und $B(n)$?

Lösung *1.Ansatz* $g(n) = 1 \, \forall_n$.

$g(1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1$.

$g(n+1) = g(n) + (-1)^n n\beta \Rightarrow 1 = 1 + (-1)^n n\beta \Rightarrow \beta = 0$.

$g(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta \Rightarrow 1 = A(n) \cdot 1 + B(n) \cdot 0 \Rightarrow A(n) = 1 \, \forall n$.

2.Ansatz $g(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

$g(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

$g(n+1) = g(n) + (-1)^n n\beta \Rightarrow (-1)^{n+1} \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (-1)^n n\beta \Rightarrow \beta = -1$.

$g(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta \Rightarrow (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = A(n) \cdot 0 + B(n) \cdot (-1) = -B(n)$

$\Rightarrow B(n) = (-1)^{n+1} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Geschlossene Form: $g(n) = \alpha + (-1)^{n+1} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \beta$.

3. ([1], Ex. 2.12 (basics)) Finden Sie eine geschlossene Form für

$$\sum_{0 \le k \le n} (-1)^k k^2.$$

Lösung Wir bestimmen mittels Störmethode der Reihe nach geschlossene Formen für

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k\,, \\ T_n &= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k k\,, \\ S_n &= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k k^2\,. \end{aligned}$$

- $U_n + (-1)^{n+1} = 1 + \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^k = 1 + \sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1} = 1 - U_n$
  $\Rightarrow U_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$.
- $T_n + (-1)^{n+1}(n+1) = 0 + \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^k k = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}(k+1) = -T_n - U_n$
  $\Rightarrow T_n = \frac{1}{2}((-1)^n(n+1) - U_n)$.
- $S_n + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = 0 + \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^k k^2 = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}(k+1)^2$
  $= -S_n - 2T_n - U_n \Rightarrow S_n = -T_n - \frac{1}{2}U_n$.
- $S_n = -T_n - \frac{1}{2}U_n = -\frac{1}{2}((-1)^n(n+1)$.

4. ([1], Ex. 2.20 (homework exercises)) Sei $H_n = \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}$ (die n-te *harmonische Zahl*). Machen Sie einen Störmethoden-Ansatz zur Berechnung von $\sum_{1\le k\le n} kH_k$, um dadurch eine geschlossene Form für

$$\sum_{1\le k\le n} H_k$$

zu erhalten.

Lösung Sei $S_n = \sum_{1\le k\le n} kH_k$ und $T_n = \sum_{1\le k\le n} H_k$.
Es ist $H_{k+1} = H_k + \frac{1}{k+1}$.

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)H_{n+1} &= 1 + \sum_{2\le k\le n+1} kH_k \\ &= 1 + \sum_{1\le k\le n}(k+1)H_{k+1} \\ &= 1 + \sum_{1\le k\le n} kH_{k+1} + \sum_{1\le k\le n} H_{k+1} \\ &= 1 + \sum_{1\le k\le n} kH_k + \sum_{1\le k\le n} k\cdot\frac{1}{k+1} + \sum_{1\le k\le n} H_k + \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k+1} \\ &= 1 + S_n + n + T_n. \end{aligned}$$

Die S_n heben sich weg, aber wir bekommen $T_n = (n+1)H_{n+1} - (n+1) = (n+1)(H_{n+1} - 1)$.

5. ([1], Ex. 2.21 (homework exercises)) Berechnen Sie mit der Störmethode

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} \\ T_n &= \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} k \\ U_n &= \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} k^2\,. \end{aligned}$$

Lösung

- Es ist $S_n = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{0\le k\le n}(-1)^k$.
  Für S_{n+1} gilt daher $S_{n+1} = (-1)^{n+1}\sum_{0\le k\le n+1}(-1)^k = -S_n + 1$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= -S_n + 1 \\ &= (-1)^{n+1}(1 + \sum_{1\le k\le n+1}(-1)^k) \\ &= (-1)^{n+1}(1 + \sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}) \\ &= (-1)^{n+1} + (-1)^n \sum_{0\le k\le n}(-1)^k \\ &= (-1)^{n+1} + S_n. \end{aligned}$$

  Wir haben also $-S_n + 1 = (-1)^{n+1} + S_n$, woraus $S_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ folgt.
- Es ist $T_n = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{n-k}k = (-1)^n \sum_{0\le k\le n}(-1)^k k$.
  Für T_{n+1} gilt daher $T_{n+1} = (-1)^{n+1}\sum_{0\le k\le n+1}(-1)^k k = -T_n + (n+1)$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= -T_n + (n+1) \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{0\le k\le n+1}(-1)^k k \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{1\le k\le n+1}(-1)^k k \\ &= (-1)^{n+1}\sum_{0\le k\le n}(-1)^{k+1}(k+1) \\ &= (-1)^{n}\sum_{0\le k\le n}(-1)^{k}(k+1) \\ &= T_n + (-1)^n \sum_{0\le k\le n}(-1)^k = T_n + S_n. \end{aligned}$$

  Wir haben also $-T_n + (n+1) = T_n + S_n$, woraus $T_n = \frac{1}{2}(n+1-S_n) = \frac{1}{2}(n+(-1)^{n+1})$ folgt.
- Es ist $U_n = \sum_{0\le k\le n}(-1)^{n-k}k^2 = (-1)^n \sum_{0\le k\le n}(-1)^k k^2$.
  Für U_{n+1} gilt daher $U_{n+1} = (-1)^{n+1}\sum_{0\le k\le n+1}(-1)^k k^2 = -U_n + (n+1)^2$.

$$
\begin{aligned}
U_{n+1} &= -U_n + (n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{0\le k\le n+1} (-1)^k k^2 \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{1\le k\le n+1} (-1)^k k^2 \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{0\le k\le n} (-1)^{k+1} (k+1)^2 \\
&= (-1)^{n} \sum_{0\le k\le n} (-1)^{k} (k^2+2k+1) \\
&= U_n + (-1)^n \cdot 2 \sum_{0\le k\le n} (-1)^k k + (-1)^n \sum_{0\le k\le n} (-1)^k \\
&= U_n + 2T_n + S_n.
\end{aligned}
$$

Wir haben also $-U_n + (n+1)^2 = U_n + 2T_n + S_n$, woraus $U_n = \frac{1}{2}((n+1)^2 - 2T_n - S_n) = \frac{1}{2}(n(n+1) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n))$ folgt.

6. ([1], Ex. 2.29 (exam problems)) Berechnen Sie

$$\sum_{1\le k\le n} (-1)^k \frac{k}{4k^2-1}$$

Lösung Bemerkung: $\frac{4k}{4k^2-1} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}$.
Sei $S_n = \sum_{1\le k\le n} (-1)^k \frac{1}{4k^2-1}$.
Es ist

$$
\begin{aligned}
4S_n &= \sum_{1\le k\le n} (-1)^k \frac{1}{2k-1} + \sum_{1\le k\le n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \\
&= -1 + \sum_{2\le k\le n} (-1)^k \frac{1}{2k-1} + \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \\
&= -1 + \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{1\le k\le n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \\
&= -1 + (-1)^n \frac{1}{2n+1},
\end{aligned}
$$

also ist $S_n = -\frac{1}{4}(1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1})$.

Literatur

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, second edition, 1994.