Name, Vorname:

Geotelematik B ◯

Informatik B ◯

Scientific Computing B ◯

Sonstige ◯

---

1. Der Vektor $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ definiert eine Gerade durch den Ursprung in $\mathbf{R}^3$.

   (a) Wie lautet der Projektor P auf diese Gerade? $P = \boxed{\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.}$ *4 P.*

   (b) Welchen Rang hat P?

   $\operatorname{rank} P = \boxed{1}$ *2 P.*

   (c) Welche Eigenwerte hat P?

   Eigenwerte: $\boxed{0, 0, 1}$ *4 P.*

   (d) Sei $u_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $u_{k+1} = Pu_k$.

   Welchen Wert hat u_{2008}? $u_{2008} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}$ *4 P.*

2. Gegeben sind die (t, y)-Wertepaare $(1, 2), (2, 4), (3, 5)$. Sie sollen nach der *Methode der kleinsten Quadrate* durch eine Gerade der Form $y = Dt$ gefittet werden.

   (a) Wie lautet D? $D = \boxed{25/14}$ *2 P.*

   (b) Wie groß ist die Summe der kleinsten Quadrate?

   Summe der kleinsten Quadrate $= \boxed{5/14}$ *6 P.*

3. Die Vektoren $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ spannen einen Unterraum U des $\mathbf{R}^3$ auf.
   Finden Sie zwei orthogonale Vektoren A, B in U.

   $A, B = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$ *4 P.*

4. Sei A eine reelle 4×4-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3, \lambda_4$.

   (a) Welche Bedingung muss λ_4 erfüllen, damit A invertierbar ist?

   Bedingung: $\boxed{\lambda_4 \neq 0}$ *4 P.*

(b) Geben Sie $\det A^{-1}$ in Abhängigkeit von λ_4 an.

$\det A^{-1} = \boxed{-\frac{1}{6}\lambda_4}$ *4 P.*

(c) Sei A von der Form $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 2 & * & * \\ * & * & 3 & * \\ * & * & * & x \end{bmatrix}$. Geben Sie λ_4 in Abhängigkeit von x an.

$\lambda_4 = \boxed{x+4}$ *4 P.*

5. Sei $D_0 = 1, D_1 = 1$ und $D_n = \frac{1}{3}D_{n-1} + \frac{2}{3}D_{n-2}$ für $n \geq 2$.

   Man kann diese Rekursion in der Form

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}.$$

   mit einer geeigneten Matrix M schreiben.

   (a) Wie lautet M?

   $M = \boxed{\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$ *2 P.*

   (b) Welche Eigenwerte hat M?

   Eigenwerte von M: $\boxed{1, -\frac{2}{3}}$ *4 P.*

   (c) Geben Sie zugehörige Eigenvektoren x_1, x_2 an.

   $x_1, x_2 = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}}$ *4 P.*

   (d) Gegen welchen Grenzwert konvergiert D_n?

   $\lim_{n\to\infty} D_n = \boxed{1}$ *4 P.*

6. Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Wie lautet der Projektor P auf den Spaltenraum von A?

   $P = \boxed{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}$ *8 P.*