Name, Vorname:

Geotelematik B ◯

Informatik B ◯

Scientific Computing B ◯

Sonstige ◯

---

1. Der Vektor $a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ definiert eine Gerade durch den Ursprung in $\mathbf{R}^3$.

   (a) Wie lautet der Projektor P auf diese Gerade? $P =$ *4 P.*

   (b) Welchen Rang hat P?
   rank $P =$ *2 P.*

   (c) Welche Eigenwerte hat P?
   Eigenwerte: *4 P.*

   (d) Sei $u_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $u_{k+1} = Pu_k$.

   Welchen Wert hat u_{2009}? $u_{2009} =$ *4 P.*

2. Gegeben sind die (t, y)-Wertepaare $(1, 2), (2, 4), (3, 5)$. Sie sollen nach der *Methode der kleinsten Quadrate* durch eine Gerade der Form $y = Dt$ gefittet werden.

   (a) Wie lautet D? $D =$ *2 P.*

   (b) Wie groß ist die Summe der kleinsten Quadrate?
   Summe der kleinsten Quadrate $=$ *6 P.*

3. Die Vektoren $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ spannen einen Unterraum U des $\mathbf{R}^3$ auf.
   Finden Sie zwei orthogonale Vektoren A, B in U.

   $A, B =$ *4 P.*

4. Sei A eine reelle 4×4-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3, \lambda_4$.

   (a) Welche Bedingung muss λ_4 erfüllen, damit A invertierbar ist?
   Bedingung: *4 P.*

(b) Geben Sie $\det A^{-1}$ in Abhängigkeit von λ_4 an.

$\det A^{-1} = \boxed{}$ *4 P.*

(c) Sei A von der Form $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ * & 2 & * & * \\ * & * & 3 & * \\ * & * & * & x \end{bmatrix}$. Geben Sie λ_4 in Abhängigkeit von x an.

$\lambda_4 = \boxed{}$ *4 P.*

5. Sei $D_0 = 1, D_1 = 1$ und $D_n = \frac{1}{3}D_{n-1} + \frac{2}{3}D_{n-2}$ für $n \geq 2$.
Man kann diese Rekursion in der Form

$$\begin{bmatrix} D_n \\ D_{n-1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_{n-2} \end{bmatrix}.$$

mit einer geeigneten Matrix M schreiben.

(a) Wie lautet M?

$M = \boxed{}$ *2 P.*

(b) Welche Eigenwerte hat M?

Eigenwerte von M: $\boxed{}$ *4 P.*

(c) Geben Sie zugehörige Eigenvektoren x_1, x_2 an.

$x_1, x_2 = \boxed{}$ *4 P.*

(d) Gegen welchen Grenzwert konvergiert D_n?

$\lim_{n\to\infty} D_n = \boxed{}$ *4 P.*

6. Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Wie lautet der Projektor P auf den Spaltenraum von A?

$P = \boxed{}$ *8 P.*