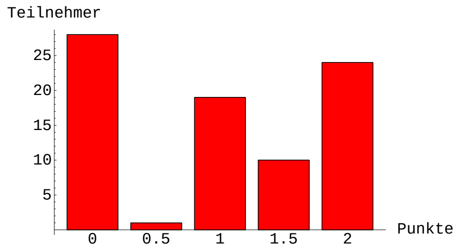
1. Die Vektoren $x, y, z \in \mathbf{R}^4$ spannen den Vektorraum U auf.

   Welche Werte sind für die Dimension von U möglich? $\dim U =$ $\boxed{0, 1, 2 \text{ oder } 3.}$ *2 P.*

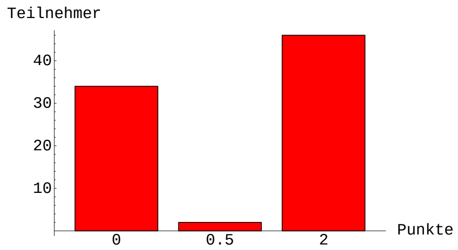
   Überlegen: Was versteht man unter Aufspannen (Erzeugen) eines Unterraums? Was ist ein Erzeugendensystem? Wann ist ein Erzeugendensystem eine Basis? Was ist die Dimension eines Unterraums?



2. Die 4×3-Matrix A hat drei Pivotspalten.

   Welchen Nullraum hat A? $N(A) =$ $\boxed{\{0\}}$ *2 P.*

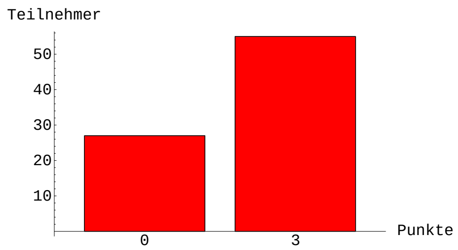
   Überlegen: Welche Spalten sind Pivotspalten, welche Spalten sind freie Spalten? Wieviele Pivotspalten und wieviele freie Spalten kann eine Matrix haben? Wie bestimmt man aus diesen Anzahlen die Nullraumdimension?



3. Sei A wie in Aufgabe 2 und $B = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}$.

   Wieviele Pivotspalten hat B? Zahl der Pivotspalten = $\boxed{3}$ *3 P.*

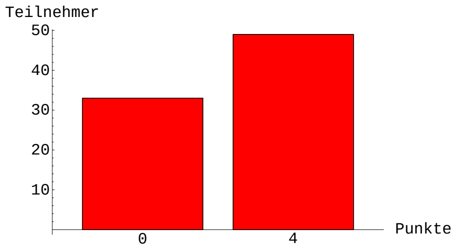
   Überlegen: Was passiert beim Übergang zur Zeilenstufenform mit der unteren Hälfte der Matrix B? Was bedeutet das für die Anzahl der Pivotspalten?



4. Sei A wie in Aufgabe 2 und $C = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$.

   Wieviele Pivotspalten hat C? Zahl der Pivotspalten = $\boxed{3}$ *4 P.*

Überlegen: Was passiert beim Übergang zur Zeilenstufenform mit der rechten Hälfte der Matrix C? Was bedeutet das für die Anzahl der Pivotspalten?

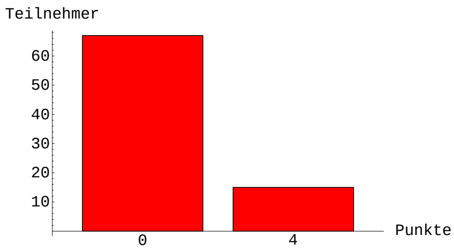


5. Sei D eine 4×3-Matrix mit $\operatorname{rank} D = 3$ und $E = \begin{bmatrix} D & D \\ D & O \end{bmatrix}$

   (O steht für eine Nullmatrix mit passendem Format).

   Welche Dimension hat der linke Nullraum von E? $\dim N(E^T) = \boxed{2}$ *4 P.*

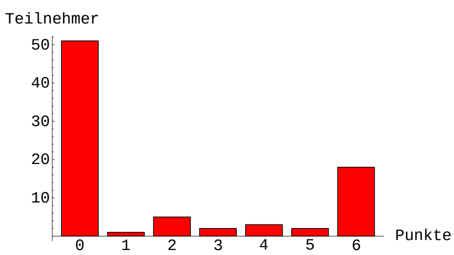
   Überlegen: Was passiert beim Übergang zur Zeilenstufenform mit den verschiedenen D's und dem O der Matrix E ? Wieviele Pivotspalten entstehen insgesamt? Welche Dimension hat der Spaltenraum von E? Wie berechnet man hieraus die Dimension des linken Nullraums von E?



6. $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ habe die vollständige Lösung $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Wie lautet A? $A = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

   Überlegen: Was sagt die partikuläre Lösung $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ über die erste Spalte von A aus? Was sagt die Lösung $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ des zugehörigen homogenen Problems über den Zusammenhang zwischen erster und zweiter Spalte von A aus? Was sagt die Lösung $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ des zugehörigen homogenen Problems über die dritte Spalte von A aus?

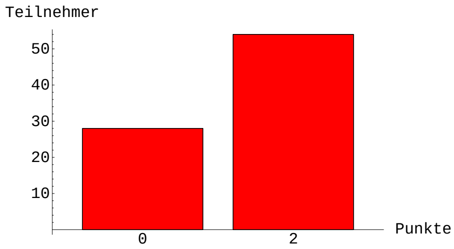


7. Wahr oder falsch?

   Ist A eine $n \times n$-Matrix mit $N(A) = \{0\}$, dann ist auch $N(A^T) = \{0\}$.

   wahr $\otimes$ falsch $\bigcirc$ *2 P.*

Überlegen: Wie sieht die "Landkarte" der vier fundamentalen Unterräume für A aus? Welche Dimensionen haben sie?

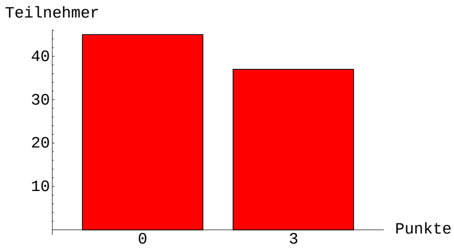


8. Wahr oder falsch?

   Die invertierbaren 5×5-Matrizen bilden einen Unterraum.

   wahr ◯ falsch ⊗ *3 P.*

Überlegen: Was wäre das Nullelement dieses Vektorraums? Die Nullmatrix O. Ist O invertierbar? Nein.

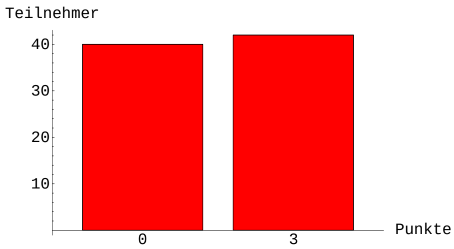


9. Wahr oder falsch?

   Ist B eine 2×2-Matrix mit $B^2 = O$, dann ist $B = O$.

   wahr ◯ falsch ⊗ *3 P.*

Überlegen: Gäbe es ein invertierbares $B \neq O$ mit $B^2 = O$, würde folgen: $B = B^{-1}B^2 = B^{-1}O = O$, ein Widerspruch. Also muss man $B \neq O$ mit $B^2 = O$ unter den nichtinvertierbaren Matrizen suchen, wenn man vermutet, dass es existiert. Tatsächlich hat $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ die gewünschte Eigenschaft.

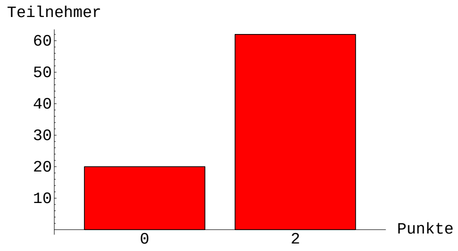


10. Wahr oder falsch?

    Ist A eine $n \times n$-Matrix mit linear unabhängigen Spalten, dann ist $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbf{R}^n$ lösbar

    wahr ⊗ falsch ◯ *2 P.*

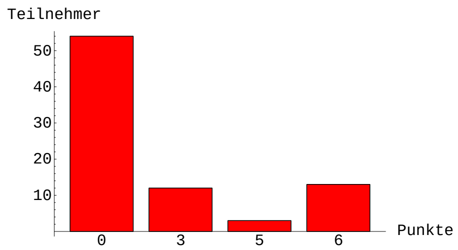
Überlegen: Wie sieht die "Landkarte" der vier fundamentalen Unterräume für A aus? Wie in Aufgabe 7. Der Spaltenraum hat volle Dimension n.



11. Sei $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    Geben Sie eine Basis von $N(B)$ an. Eine Basis von $N(B)$ ist $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

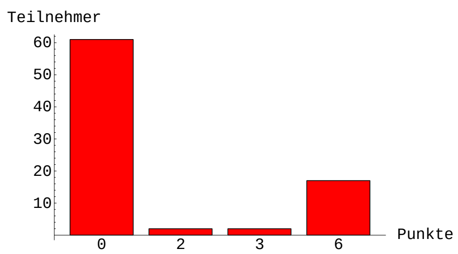
Überlegen: $B = AR$ mit A invertierbar und R in Zeilenstufenform. $ARx = 0 \Leftrightarrow Rx = 0$. $N(B) = N(R)$. Eine Basis von $N(R)$ bekommt man mit der üblichen Konstruktion.



12. Sei B wie in Aufgabe 11. Geben Sie eine partikuläre Lösung von $Bx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ an.

    Eine partikuäre Lösung von $Bx = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist $\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

Überlegen: Die zweite Spalte von B ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (warum?), d.h. $B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

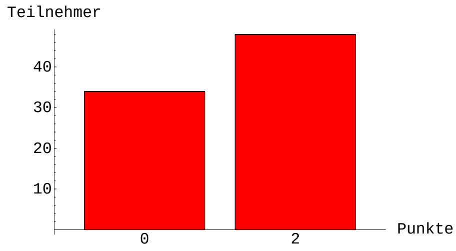


13. Wahr oder falsch?

    Sei A beliebig. A und $-A$ haben die gleichen vier fundamentalen Unterräume.

    wahr $\otimes$ falsch $\bigcirc$ *2 P.*

Überlegen: Die Spalten von A und von $-A$ spannen den gleichen Raum auf $\Rightarrow C(A) = C(-A)$. ($Ax = 0 \Leftrightarrow -Ax = 0$) $\Rightarrow N(A) = N(-A)$. Aus dem gleichen Grund ist $C(A^T) = C(-A^T)$ und $N(A^T) = N(-A^T)$.

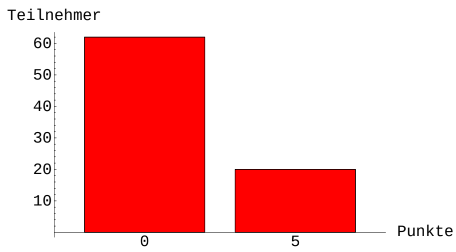


14. Wahr oder falsch?

    Sind A, B Matrizen mit den gleichen vier fundamentalen Unterräumen, dann ist $A = cB$ für ein geeignetes $c \in \mathbf{R}$.

    wahr ○ falsch ⊗ *5 P.*

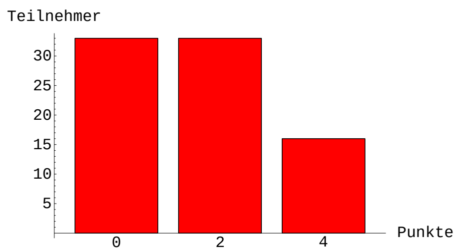
Überlegen: Ein Gegenbeispiel ist mit $A = I$ und $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ gegeben: $C(A) = C(B) = \mathbf{R}^2$, $N(A) = N(B) = \{0\}$, also stimmen die vier fundamentalen Unterräume überein.



15. Welche der vier fundamentalen Unterräume ändern sich nicht, wenn man in einer Matrix A zwei Zeilen tauscht?

    Es ändern sich nicht: $\boxed{N(A), C(A^T)}$ *4 P.*

Überlegen: Natürlich ändert sich der Zeilenraum $C(A^T)$ nicht. Der Nullraum $N(A)$ ändert sich auch nicht, denn $Ax = 0 \Leftrightarrow PAx = 0$ für jede Zeilentauschmatrix P. Dagegen können sich $C(A)$ und $N(A^T)$ ändern, wie man am Beispiel $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ sieht.

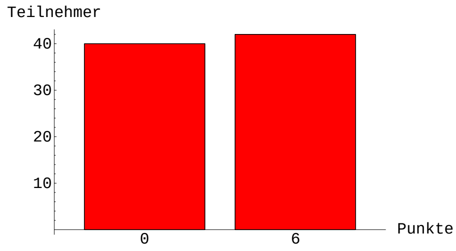


16. Wahr oder falsch?

    Es gibt eine Matrix A, für die gilt: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \in N(A)$ und $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \in C(A^T)$.

    wahr ○ falsch ⊗ *6 P.*

Überlegen: Wenn die Behauptung stimmt, gibt es einen Vektor y mit $y^T A = [1\ 2\ {-1}]$; folglich ist $y^T A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = [1\ 2\ {-1}] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = 6$. Andrerseits ist aber $A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ der Nullvektor. Widerspruch!



17. Gegeben ist die Matrix

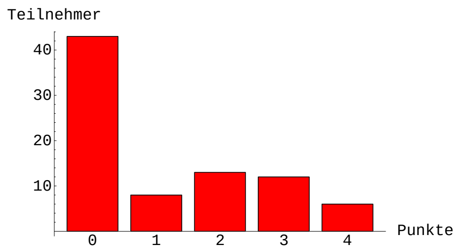
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die LU Zerlegung der Matrix.
Sorry, A ist nicht quadratisch, hmmm... es geht aber trotzdem:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 P.

Wiederholen: Wenn man A schrittweise in eine obere Dreiecksmatrix U überführt und dabei von oben nach unten und von links nach rechts arbeitet, fällt für jeden Schritt eine Zahl an. In welcher Form tauchen diese Zahlen in L auf?

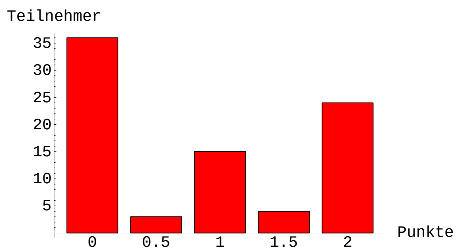


(b) Geben sie die Dimensionen der 4 Fundamentalräume an.

$$\dim N(A) = 0, \quad \dim C(A^T) = 3, \quad \dim C(A) = 3, \quad \dim N(A^T) = 2.$$

2 P.

Wiederholen: Wie bestimmt man die Dimensionen der vier fundamentalen Unterräume?

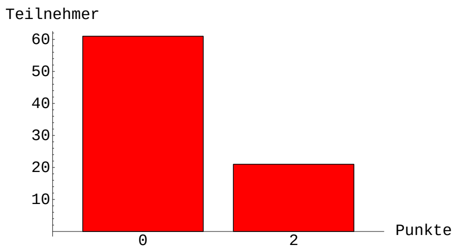


18. Beantworten Sie die folgenden Fragen zu Mathematica durch Ankreuzen der richtigen Antwort.

(a) `{{1,2,3}}.{{4},{5},{6}}` ergibt:

○ `{1,2,3,4,5,6}` ○ `32`
○ `{4,10,18}` ⊗ keines der Drei (sondern `{{32}}`) *2 P.*

Empfehlung: Mehr mit Mathematica experimentieren, Mathematica zum Lösen von Aufgaben oder zur Kontrolle von Lösungen einsetzen.



(b) A sei eine Matrix, x und b seien Vektoren. Zur Lösung der Gleichung $Ax = b$ verwendet man den Befehl:

○ `LinearSolve[A.x,b]` ○ `Solve[Ax=b]`
⊗ `LinearSolve[A,b]` ○ keinen der Drei *2 P.*

Empfehlung: Mehr mit Mathematica experimentieren. Mathematica zum Lösen von Aufgaben oder zur Kontrolle von Lösungen einsetzen.