Abgabe: *SW*12 + *SW*13

Gilt für die Aufgaben 1 und 3:
Die Definitionen von *Inversion* und *Signature* und eine gute Kurzbeschreibung ihrer Bedeutung finden Sie unter:

Weisstein, Eric W. „*Permutation Inversion*“
From *MathWorld* - A Wolfram Web Resource:
http://mathworld.wolfram.com/PermutationInversion.html

1. Man bestimme die Anzahl der Inversionen der folgenden Permutationen von {1, 2, 3, 4, 5} und ob sie gerade oder ungerade sind:

   (a) (4, 1, 3, 5, 2) (b) (5, 3, 4, 2,1) (c) (3, 2, 5, 4, 1)

   (d) (5, 4, 3, 2, 1) (d) (1, 2, 3, 4, 5) (e) (1, 4, 2, 3, 5)

2. Man bestimme alle λ, für die $det(A) = 0$ ist.

   (a) $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix}.$

3. Bestimmen Sie i und j, so dass der Term $a_{12}a_{2i}a_{34}a_{4j}a_{51}$ das +-Zeichen in der Summenentwicklung der Determinanten von Dimension 5 hat.

4. Man löse nach x auf.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

5. (a) Man zeige, dass die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

genau dann kommutieren, wenn

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

(b) Man zeige, dass der Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

nicht von θ abhängt.

6. Sei

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Stellen Sie $det(A)$ als Fläche dar.

(b) A' geht durch Addition des (-1/3)-Fachen von Spalte 1 zur Spalte 2 hervor. Stellen Sie $det(A')$ als Fläche dar.

(c) Sei $A = LU$ die LU-Zerlegung der Matrix A. Stellen Sie $det(L)$ und $det(U)$ als Flächen dar.

7. Zeigen Sie, dass

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3\ldots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3\ldots & x_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1 & x_2 & x_3\ldots & x_n \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+\ldots+x_n .$$

8. Sei

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Mit $det(A)$ = -7. Man bestimme:

(a) $\det(3A)$ (b) $\det(A^{-1})$
(c) $\det(2A^{-1})$ (d) $\det((2A)^{-1})$.

Literatur

Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3rd Edition, Wessley-Cambridge Press, 2003.