1. *([1], Problem 5.1.3.)* Wahr oder falsch? Begründung oder Gegenbeispiel! *4 Punkte*

   (a) $\det(I + A) = 1 + \det A$.

   (b) $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

   (c) $\det(3A) = 3 \det A$.

   (d) $\det(AB - BA) = 0$.

   Lösung

   (a) Falsch. Sei $A = -I$ und vom Typ 2×2.
   Es ist $\det(I + A) = \det O = 0$ aber $\det I + \det(-I) = 2$.

   (b) Wahr. Zweimal Produktsatz anwenden.

   (c) Falsch. Sei $A = I$ und vom Typ 2×2.
   Es ist $\det(3I) = 9$ und $3 \det I = 3$.

   (d) Falsch. Seien $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.
   Es ist $AB - BA = -I$, also $\det(AB - BA) = 1$.

2. *([1], Problem 5.1.11.)* Warum ist folgende Überlegung falsch? *3 Punkte*

   Wenn

   $$CD = -DC \tag{1}$$

   ist, dann ist

   $$(\det C)(\det D) = -(\det D)(\det C), \tag{2}$$

   also ist

   $$\det C = 0 \text{ oder } \det D = 0. \tag{3}$$

   .

   Lösung Falsch. Wenn D eine $2n \times 2n$-Matrix ist, ist $\det(-D) = \det D$.

3. *([1], Problem 5.1.12.)* Wo steckt hier der Fehler? *3 Punkte*

   Für $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ gilt

   $$\det A^{-1} = \det \tfrac{1}{ad-bc} \left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right] \tag{4}$$
   $$= \tfrac{ad-bc}{ad-bc} \tag{5}$$
   $$= 1. \tag{6}$$

   Was kommt für $\det A^{-1}$ wirklich heraus?

   Lösung (5) muss lauten: $\ldots = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2}$.

   Der richtige Wert für $\det A^{-1}$ ist $\frac{1}{ad-bc}$.

4. *([1], Problems 5.1.14, 5.1.15)* *4 Punkte*

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{bmatrix}$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$$

Lösung

(a) Das U der LU-Zerlegung lautet $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Also hat die Determinante den Wert 36.

(b) Tauscht man Zeile 1 mit Zeile 2, dann Zeile 2 mit Zeile 3, dann Zeile 3 mit Zeile 4, erhält man die Matrix $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Diese hat eine LU-Zerlegung mit $U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
Also hat die Determinante den Wert $(-1)^3(-5) = 5$. (korrigiert!)
($(-1)^3$ für die Zeilentauschoperationen.)

(c) Man ziehe Zeile 1 von den Zeilen 2 und 3 ab. Anschließend ziehe man das Doppelte der Zeile 2 von Zeile 3 ab. Resultat: die letzte Zeile ist eine Nullzeile.
Deshalb ist die Determinante 0.

(d) Das U der LU-Zerlegung lautet $\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1-t^2 & t-t^3 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{bmatrix}$.
Also hat die Determinante den Wert $(1-t^2)^2$. (korrigiert!)

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.