Abgabe: *SW*8 + *SW*9

1. Definieren Sie die Begriffe, jede mit einem konkreten Beispiel:
   (a) **Orthogonalität** von Vektoren;
   (b) **Orthogonalität** von Unterräumen;
   (c) **Projektion** auf eine Gerade;
   (d) **Projektion** auf einen Unterraum.

2. Konstruieren Sie eine Matrix mit der gefragten Bedingung oder begründen Sie, wenn es nicht möglich ist:
   (a) Spaltenraum beinhaltet $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, Nullraum beinhaltet $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (b) Zeilenraum beinhaltet $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, Nullraum beinhaltet $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (c) $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ hat eine Lösung und $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   (d) Jede Zeile ist orthogonal auf jede Spalte.

3. ***Verallgemeinerter Satz von Pythagoras.*** *Für ortogonale Vektoren u und v in einem Vektorraum mit Skalarprodukt gilt:*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2.$$

   Prüfen Sie es für die Vektorenpaare:
   (a) $u = (-1, 3, 2)$ und $v = (4, 2, -1)$,
   (b) $u = (-4, 6, -10, 1)$ und $v = (2, 1, -2, 9)$
   (c) $u = (a, b)$ und $v = (-b, a)$

4. ***Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.*** *Für Vektoren u und v aus einem Vektorraum mit Skalarprodukt gilt:*

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|.$$

   Prüfen Sie es für die Vektorenpaare:
   (a) $u = (-1, 3, 2)$ und $v = (4, 3, 1)$,

(b) $u = (4, 6, 8, 10)$ und $v = (2, 1, -2, 9)$

(c) $u = (a, b)$ und $v = (c, d)$

5. Wir nehmen an, dass die Vektoren (1, 2, 2, 3) und (1, 3, 3, 2) den Unterraum S aufspannen. Finden Sie zwei Vektoren, die den Unterraum $S^{\perp}$ aufspannen. Für welche A ist das ist äquivalent mit dem Lösen von $Ax=0$?

6. Wir nehmen an, dass A eine 4×3-Matrix die aus der 4×4-Einheitsmatrix durch Entfernen der letzten Spalte konstruiert ist. Projizieren Sie den Vektor (1, 2, 3, 4) auf den Spaltenraum von A. Welche Form die Projektion-Matrix P ist und wie lautet sie?

7. Zeigen Sie: wenn $P^2 = P$, dann gilt auch $(I-P)^2=I-P$. Wenn P auf den Spaltenraum von A projiziert, wohin projiziert dann $I-P$?

8. Um die Projektion-Matrix auf die Ebene $x-y-2z = 0$ zu berechnen, wählen Sie zwei Vektoren aus dieser Ebene aus und machen Sie sie Spalten von A. Die Ebene soll der Spaltenraum $C(A)$ sein. Dann berechnen Sie $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

Literatur

1. Anton Howard, *Lineare Algebra: Einführung, Grundlagen, Übungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
2. Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3rd Edition, Wessley-Cambridge Press, 2003.