

1. (3 Punkte) Sei A eine Matrix, die durch die üblichen Zeilenoperationen in

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

übergeführt werden kann.

Wie lautet die vollständige Lösung des Problems

$$Ax = \text{Summe der Spalten von } A?$$

2. (3 Punkte) Seien A und B 4×4 -Matrizen mit dem gleichem Spaltenraum.

- Haben A und B die gleiche Anzahl von Pivotspalten?
- Haben A und B die gleichen Nullräume?
- Wenn A invertierbar ist, ist dann auch B invertierbar?

Antworten mit Begründung!

3. (3 Punkte)

- Reduzieren Sie A zu einer oberen Dreiecksmatrix U und führen Sie die gleichen Eliminationsschritte an der "rechten Seite" b aus:

$$[A \quad b] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & b_1 \\ 3 & 5 & 1 & b_2 \\ -3 & 3 & 2 & b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow [U \quad c].$$

Faktorisieren Sie A in der Form $A = LU$ (LU -Zerlegung).

- Ändern Sie die letzte Komponente von A von 2 auf einen Wert, der die neue Matrix A_{neu} zu einer singulären Matrix werden lässt.
Beschreiben Sie den Spaltenraum Ihrer Matrix A_{neu} genau.
- Welche Bedingungen müssen b_1, b_2, b_3 erfüllen, damit $A_{\text{neu}}x = b$ lösbar ist?
- Wie lautet die vollständige Lösung des Problems

$$A_{\text{neu}}x = \text{erste Spalte von } A?$$

4. (3 Punkte) Die Spalten einer 7×4 -Matrix A seien linear unabhängig.

- Wieviele Nullzeilen hat die Matrix U der LU -Zerlegung von A ?
- Warum ist $A^T y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sicher lösbar?