Aufgabe 1

(a) Def.: Lineare Unabhängigkeit: Sei S = $\{v_1,\ v_2,\ ..\ ,\ v_n\}$ eine nichtleere Menge von Vektoren. Die Gleichung $k_1v_1 + k_2v_2 + .. + k_nv_n = 0$ hat mindestens die triviale Lösung $k_1 = k_2 = .. = k_n = 0$.
S heisst linear unabhängig, wenn dies die **einzige** Lösung ist, sonst heisst S linear abhängig.

(b) Def.: Eine Teilmenge S = $v_1, v_2, .., v_n\}$ eines Vektorraums V heisst Basis von V, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:
(a) S ist linear unabhängig.
(b) S ist Erzeugendensystem für V.

(c) Def.: Ein vom Nullraum verschiedener Vektorraum V heisst endlich-dimensional, wenn er eine endliche Basis hat, sonst heisst er unendlich-dimensional.

Aufgabe 2

(a) falsch, die Vektoren sind nicht linear unabhängig.
Bsp.: $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$
(b) wahr, die Vektoren sind linear abhängig.
Bsp.: $3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$

Aufgabe 3

$k_1v_1 + k_2v_2 + .. + k_nv_n = 0$
$k_1(1, 0, ..., 0) + k_2(0, 1, 0, ..., 0) + .. + k_n(0, ..., 0, 1) = 0$
$\langle = \rangle\ (k_1, k_2, ..., k_n) = (0, 0, .., 0)$
$\langle = \rangle\ k_1 = 0k_2 = 0...k_n = 0$

Aufgabe 5

(a) linear abhängig
(b) linear unabhängig

Aufgabe 6

Annahme: S ist ein Erzeugendensystem des R^3.
Ein beliebiger Vektor b = (b_1, b_2, b_3) soll als Linearkombination
$b = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ darstellbar sein. $\langle = \rangle$
$(b_1, b_2, b_3) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3)\ \langle = \rangle$
$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = b_1$
$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = b_2$
$c_1 + +4c_3 = b_3$

Wir haben zu zeigen, dass dieses System (S) für alle Vektoren b konsistent ist.
Für die lineare Unabhängigkeit von S ist nachzuweisen, dass die Gleichung
$c_1v_1 + c_2v2 + c_3v_3 = 0 = \longrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$
$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = 0$
$c_{1+} + 4c_3 = 0$

Dieses System ist nur trivial zu lösen A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ S ist linear unabhängig, S erzeugt den ganzen Raum R^3 $\rightarrow$ S ist Basis für R^3

Aufgabe 7

(a) v_1, v_2, da $v_3 = 2v_1 + v_2, v_4 = -2v_1 + v_2$
(b) v_1, v_3, da $v_2 = 2v_1, v_4 = v_1 + v_3$
(c) v_1, v_2, v_4, da $v_3 = 2v_1 - v_2, v_5 = -v_1 + 3v_2 + 2v_4$

Aufgabe 8

$\lambda = -\frac{1}{2}$
$\lambda = 1$

Aufgabe 9

(a)$r < m, r \preceq n$
(b) Wenn m - r ¿ 0 ist, enthält der linke Nullraum einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor.