Abgabe: *SW6 + SW7*

1. Definieren Sie die Begriffe:
   (a) **lineare Unabhängigkeit** einer nicht leeren Menge von Vektoren S;
   (b) **Basis** eines Vektoraumes V;
   (c) die **Dimension** dim (V) eines endlich-dimensionalen Vektorraumes.

2. Wahr oder falsch?
   (a) Die Menge $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = \{2, -1, 0, 3\}$, $v_2 = \{1, 2, 5, -1\}$, $v_3 = \{7, -1, 5, 8\}$ ist linear unabhängig.
   (b) Die Polynome $p_1 = 1 - x$, $p_2 = 5 + 3x - 2x^2$, $p_3 = 1 + 3x - x^2$ sind linear abhängig in P_2.

3. Zeigen Sie, dass die Standardbasisvektoren $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ eine linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ bilden.

4. Man untersuche
   (a) die Vektoren $v1 = (1, -2, 3)$, $v2 = (5, 6, -1)$, $v3 = (3, 2, 1)$ in R^3
   (b) die Menge der Polynome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ in P_n.

   auf lineare Unabhängigkeit.

5. Man zeige, dass $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = \{1, 2, 1\}$, $v_2 = \{2, 9, 0\}$ und $v_3 = \{3, 3, 4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

6. Man bestimme eine Teilmenge der gegebenen Vektoren, die eine Basis des aufgespannten Raumes ist, und stelle die übrigen Vektoren als Linearkombinationen dieser Basis dar.
   (a) $v_1 = \{1, 0, 1, 1\}$, $v_2 = \{-3, 3, 7, 1\}$, $v_3 = \{-1, 3, 9, 3\}$, $v_4 = \{-5, 3, 5, -1\}$
   (b) $v_1 = \{1, -2, 0, 3\}$, $v_2 = \{2, -4, 0, 6\}$, $v_3 = \{-1, 1, 2, 0\}$, $v_4 = \{0, -1, 2, 3\}$
   (c) $v_1 = \{1, -1, 5, 2\}$, $v_2 = \{-2, 3, 1, 0\}$, $v_3 = \{4, -5, 9, 4\}$, $v_4 = \{0, 4, 2, -3\}$, $v_5 = \{-7, 18, 2, -8\}$.

7. Für welche λ sind die folgenden Vektoren linear abhängig?
   $v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2})$ und $v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$

8. Sei A eine $m{\times}n$ Matrize von Rang r. Wir nehmen an, dass es eine rechte Seite b gibt, so dass $Ax = b$ keine Lösung hat.
   (a) Welche Ungleichungen (< oder ≤) müssen zwischen m, n und r gelten?
   (b) Woher weiß man, dass A^Ty=0 andere Lösungen als y=0 hat?

Literatur

1. Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3rd Edition, Wessley-Cambridge Press, 2003.
2. Anton Howard, *Lineare Algebra: Einführung, Grundlagen, Übungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.