Aufgabe 1

Man bildet das innere Produkt (Skalarprodukt). Wenn dieses Null ergibt, sind die Vektoren im euklidischen Raum orthogonal.
Wenn x und y n-dimensionale Vektoren sind, dann berechnet man das innere Produkt allgemein mit

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

(a) $u \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) = 20$
$\Rightarrow$ die Vektoren u und v sind nicht orthogonal

(b) $u \cdot v = 0 \Rightarrow$ u und v sind orthogonal

(c) $u \cdot v = 7 \Rightarrow$ u und v sind nicht orthogonal

Aufgabe 2

(a) $\sqrt{29}$ (b) 3 (c) 13 (d) $\sqrt{31}$

Aufgabe 3

2x2: $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ 3x3: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ 4x4: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Aufgabe 4

Es gibt 6 Permutationsmatrizen vom Rang 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allgemein gibt es n! Permutationsmatrizen vom Rang n.

Aufgabe 5

b ist im Spaltenraum von A, wenn es für die Gleichung Ax=b mindestens eine Lösung gibt. Zugleich erhält man mit der Lösung für x die Skalare für die Linearkombination der Spaltenvektoren die b ergibt.

(a) Für Ax=b erhält man die Lösung $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und somit

$$b = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(b) b liegt nich im Spaltenraum von A, da Ax=b keine Lösung hat.

(c) Für Ax=b erhält man die Lösung $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und somit

$$b = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 7

(a) Da die Matrix A invertierbar ist, besteht der Nullraum nur aus dem Nullvektor

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Durch Elimination erhält man die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Löst man nun Ax=0, bekommt man die linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

die ein Erzeugendensystem für A sind.

Aufgabe 8

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}$$

Um U mit vier Pivotelementen zu erhalten, müssen Folgende Bedingungen gelten

$$a \neq 0, \quad a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq d$$