Abgabe: *SW4* + *SW5*

1. *Definition. Zwei Vektoren u und v in R^n heißen* ***orthogonal****, wenn $u \cdot v = 0$.* Bestimmen Sie, welche der folgenden Vektorenpaare aus R^4 orthogonal sind:

   (a) $u = (1, 2, 3, 4)$ und $v = (-3, -2, 1, -4)$

   (b) $u = (-2, 3, 1, 4)$ und $v = (1, 2, 0, -1)$

   (c) $u = (3, 1, 4, -5)$ und $v = (2, 2, -4, -3)$

2. *Wir definieren die* ***euklidische Norm*** *(oder* ***euklidische Länge****) eines Vektors $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ im R^n durch*

$$\|u\| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}\,.$$

   Man berechne die euklidische Norm des jeweiligen Vektors:

   (a) (-2, 5) (b) (1, 2, -2) (c) (3, 4, 0, -12) (d) (-2, 1, 1, -3, 4).

3. Geben Sie drei Beispiele von symmetrischen Matrizen: 2×2, 3×3, 4×4.

4. Schreiben Sie alle Permutationsmatrizen mit 3 Zeilen und 3 Spalten. Wie viele Permutationsmatrizen von Rang n gibt es?

5. Man entscheide, ob b im Spaltenraum von A liegt und stelle b gegebenenfalls als Lienarkombination der Spalten von A dar.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. *Ein* ***Erzeugendensystem*** *ist eine Menge von Vektoren, mit deren Linearkombinationen alle Vektoren des gewünschten Unterraums dargestellt werden können.*

   Man bestimme ein Erzeugendensystem der folgenden Unterräume des R^3:

   (a) die Ebene $3x-2y+5z = 0$,

   (b) die Ebene $x-y=0$,

   (c) die Gerade $x=2t$, $y=-t$, $z=4t$, $t \in \mathbb{R}$,

   (d) alle Vektoren (a, b, c) mit $b=a+c$.

7. Man gebe den Nullraum von A durch Angabe eines Erzeugendensystems an.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

8. Berechnen Sie L und U für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

   Man finde vier Bedingungen für a, b, c, d, um $A=LU$ mit vier Pivotelementen zu erhalten.

Literatur

1. Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3rd Edition, Wessley-Cambridge Press, 2003.
2. Anton Howard, *Lineare Algebra: Einführung, Grundlagen, Übungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.