Hausaufgabe Lineare Algebra Blatt 2 - Lösungen

Aufgabe 1

(a) $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $B^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $AB=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $BA=\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

Aufgabe 2

(a) $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A^2=\begin{bmatrix} -1 & 10 & 2 \\ -2 & 11 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $B^2=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (f) $BA-AB=\begin{bmatrix} -7 & 9 & -7 \\ -9 & 7 & -8 \\ 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

Aufgabe 3

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4

(a) x = 1 y = -2 z = 1 (b) x = 2 y = -1 z = 0 u = 0

Aufgabe 5

Für Matrizen ist das Produkt AB nur definiert, wenn die Spaltenanzahl von A und die Zeilenanzahl von B übereinstimmen: A(m,n), B(n,b). So ist AB für A(10,20) und B(20,30) definiert aber BA nicht.

Aufgabe 6

Für eine Multiplikation von 2 Matrizen sind m*n*b Multiplikation nötig.
(a) 12800 und 3000 Multiplikationen
(b) 125800 und 4252 Multiplikationen

Aufgabe 7

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um zu Zeigen, dass es unendlich viele Matrizen gibt, für die diese Gleichung gilt, reicht es zu zeigen dass eine Variable frei gewählt werden kann.

z.B:
$$\begin{array}{ll} a^2+bc=1 & b=0 \\ d^2+bc=1 & a=-1 \\ b(a+d)=0 & d=1 \\ c(a+d)=0 & \end{array}$$

Mit der Definition dieser 3 Variablen werden alle 4 Gleichungssysteme erfüllt. c kann also beliebig gewählt werden: $c\in\mathbb{Z}$ und so gibt es unendlich viele Matrizen.

Aufgabe 8

$$A=\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad A^2=\begin{bmatrix} \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) & -2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha)-sin2(\alpha) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A^n=\begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$$

Dies kann durch vollständige Induktion bewiesen werden.

$$A^{n+1}=\begin{bmatrix} \cos((n+1)\alpha) & -\sin((n+1)\alpha) \\ \sin((n+1)\alpha) & \cos((n+1)\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A^{(n+1)}=A^n A=\begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos((n+1)\alpha) & -\sin((n+1)\alpha) \\ \sin((n+1)\alpha) & \cos((n+1)\alpha) \end{bmatrix}$$