Abgabe: *SW4*

1. Seien

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man berechne:

(*a*) $A+B$ (*b*) A^{-1} (*c*) B^{-1} (*d*) AB (*e*) BA.

2. Seien

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man berechne:

(*a*) $A+B$ (*b*) A^{-1} (*c*) B^{-1} (*d*) A^2 (*e*) B^2 (*f*) $BA - AB$.

3. Finden Sie die Matrix X, wenn gilt:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Man bestimme eine *LU*-Zerlegung der Koeffizientenmatrix und löse damit die Gleichungssysteme.

(*a*) $$\begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(*b*) $$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. *Für reelle Zahlen a und b gilt stets ab = ba, das so genannte Kommunikativgesetz der Multiplikation. Betrachtet man dagegen die Matrizen A und B, so kann aus verschiedenen Gründen AB ≠ BA sein. Zunächst kann AB definiert, aber BA nicht definiert sein.* Geben Sie mindestens ein konkretes Beispiel für jeden Fall.

6. Wir bezeichnen mit $A(m, n)$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.

(*a*) Wenn wir zum Beispiel die Matrizen $A_0(40, 30)$, $A_1(30, 10)$ und $A_2(10, 2)$ betrachten, gibt es zwei Möglichkeiten, das Produkt $A_0A_1A_2$ zu bilden:

$(A_0A_1)A_2$ erfordert ______________ elementare Multiplikationen;

$A_0(A_1A_2)$ – erfordert insgesamt ____________ elementare Multiplikationen.

(*b*) Für die Berechnung des Produktes von 8 Matrizen gibt es 429 Möglichkeiten. Wenn wir die Matrizen $A_0(34, 23)$, $A_1(23, 12)$, $A_2(12, 2)$, $A_3(2, 5)$, $A_4(5, 80)$, $A_5(80, 3)$, $A_6(3, 3)$, $A_7(3, 12)$ betrachten, dann könnte das Produkt $A_0A_1\ldots A_7$ so geklammert werden: $(A_0(A_1((A_2A_3)A_4)))((A_5A_6)A_7)$ – benötigt ____________ elementare Multiplikationen;

$(A_0(A_1A_2))(((A_3(A_4A_5))A_6)A_7)$ – benötigt ____________ elementare Multiplikationen.

7. Beweisen Sie, dass es unendlich viele Matrizen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gibt, für die gilt: $A^2 = I$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

8. Sei

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Man berechne A^n, für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Bemerkungen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Literatur

1. Anton Howard, *Lineare Algebra: Einführung, Grundlagen, Übungen*, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
2. Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 3rd Edition, Wessley-Cambridge Press, 2003.