

Lineare Algebra, Prüfung, mit Lösungen

M.Gruber, M.Ruckert

3. Februar 2009, 10:30–12:00, R1.006, R1.007, R1.008, R1.049, R2.007, R3.014
(146)

1. (a) Angenommen, M ist eine symmetrische 3×3 -Matrix.
Zuerst addieren Sie das Doppelte von Zeile 2 zu Zeile 3.
Dann addieren Sie das Doppelte von Spalte 2 zu Spalte 3.
Ist das Ergebnis wieder eine symmetrische Matrix?

Lösung Das Ergebnis ist $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, eine symmetrische Matrix.

Antwort ("ja" oder "nein"):

ja

4 P.

- (b) Gegeben ist die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Die Spalten von Q sind orthonormal.

Berechnen Sie

$$(QQ^T)^7.$$

Lösung $(QQ^T)^7 = Q(Q^TQ)^6Q^T = QI^6Q^T = QQ^T$ (I die 2×2 -Einheitsmatrix).

Es ist $QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$(QQ^T)^7 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 P.

2. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Führen Sie die Zeilenumformungen durch, die das U der LU-Zerlegung von A liefern.
Welches U erhalten Sie?

Lösung $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U.$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3 P.

(b) Welches L ergibt sich hieraus?

Lösung Die nichttrivialen Koeffizienten von L außerhalb der Diagonalen sind:

$$L_{2,1} = -1, L_{3,2} = -1.$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 P.$$

(c) Es soll das Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden.

Es sei bekannt: $L \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = b$.

Wie lautet x ?

Lösung x löst $Ux = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Rückwärtssubstitution liefert $x = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

$$x = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad 5 P.$$

3. Die Gleichung

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

habe die vollständige Lösung

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Wie lautet A ?

Lösung Wegen $A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ ist die zweite Spalte von A das (-2) -Fache der ersten Spalte.

Wegen $A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ ist die dritte Spalte gleich der zweiten, also ebenfalls das (-2) -Fache der ersten Spalte.

Wegen $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ist die Summe von erster und dritter Spalte von A gleich $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Die Summe von erster und dritter Spalte von A ist das (-1) -Fache der ersten Spalte.

Also ist die erste Spalte von A gleich $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -6 & 12 & 12 \end{bmatrix} \quad 10 P.$$

4. Gesucht ist der Projektor P , der auf die von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ aufgespannte Ebene projiziert.

(a) Wie lautet P ?

Lösung Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Die Projektionsebene ist $C(A)$.

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

$$(A^T A) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}. \quad (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

$$A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad 7 P.$$

(b) Welche Eigenwerte hat P ?

Lösung P hat die Eigenwerte 0 (einfach) und 1 (doppelt).

Die Eigenwerte (mit Vielfachheiten) von P sind $0, 1, 1$ 3 P.

5. Ich gebe eine $(m \times n)$ -Matrix A in Mathematica ein. Nach Eingabe von

`In[2]:= Eigensystem[A]`

erhalte ich

`Out[2]= {{3, 3, 0}, {{1, 0, 1}, {1, 1, 0}, {-1, 1, 1}}}`

(a) Wie groß sind Zeilenzahl m und Spaltenzahl n von A ?

$$m, n = 3, 3 \quad 2 P.$$

(b) Welche Dimension hat der Nullraum von A ?

$$\dim N(A) = 1 \quad 2 P.$$

(c) Welche Dimension hat der Spaltenraum von A ?

$$\dim C(A) = 2 \quad 2 P.$$

(d) Welche Dimension hat der Zeilenraum von A ?

$$\dim C(A^T) = 2 \quad 2 P.$$

(e) Welche Dimension hat der linke Nullraum von A ?

$$\dim N(A^T) = 1 \quad 2 P.$$

6. In der (t, y) -Ebene sollen die Punkte $\{(-1, 0), (0, 1), (1, 3/2)\}$ möglichst gut (Kleinste Quadrate) durch die Gerade $y = a + bt$ gefittet werden.

(a) Wie lauten a und b ?

Lösung Die (unlösbare) Aufgabe lautet $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Der Kleinste-Quadrate-Ansatz lautet $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Somit ist $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ zu lösen.

Man erhält $a = 5/6$ und $b = 3/4$.

$$a, b = \boxed{5/6, 3/4}$$

6 P.

(b) Wie groß ist die Summe der kleinsten Quadrate?

Lösung $\left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 \\ 3/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1/12 \\ -1/6 \\ 1/12 \end{bmatrix} \right\|^2 = 1/24.$

$$\text{Summe der kleinsten Quadrate} = \boxed{1/24}$$

4 P.

7. (a) Angenommen, Q ist eine 3×3 -Matrix mit $\text{rank } Q = 1$.

Kann Q drei verschiedene Eigenwerte haben?

Lösung Wenn $\text{rank } Q = 1$ ist, hat Q einen doppelten Eigenwert 0.

Q kann höchstens noch einen weiteren Eigenwert haben.

$$\text{Antwort ("ja" oder "nein")}: \boxed{\text{nein}}$$

4 P.

(b) Finden Sie eine Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

A soll keine Diagonalmatrix sein!

Lösung (Beispiel) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mit $a \neq b$

$$\text{mein } A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

6 P.

8. (a) Wie lautet die Matrix F_4 für die diskrete Fouriertransformation?

Lösung $F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix}$ mit $w = i$, also $F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$

$$F_4 = \frac{1}{2} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}}$$

3 P.

(b) Zeigen Sie: die zweite und dritte Spalte von F_4 sind orthonormal.

Lösung $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + i \cdot (-1) = 1 + i - 1 - i = 0.$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + (-i) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + i \cdot (-1) = 1 + i - 1 - i = 0}$$

3 P.

(c) Berechnen Sie x für

$$F_4 x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lösung $F_4 x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F_4^* F_4 x = I x = F_4^* \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$

3 P.

9. In den Dörfern A und B wohnen zu Beginn gleich viele Menschen. Nun zieht Jahr für Jahr die Hälfte der Einwohner von A nach B (der Rest bleibt) und ein Viertel der Einwohner von B nach A (der Rest bleibt).

(a) Wie verhält sich die Einwohnerzahl von A zur Einwohnerzahl von B nach einem Jahr?

Lösung Nach einem Jahr ist das Verhältnis $(1 - 1/2 + 1/4) : (1 - 1/4 + 1/2) = 3 : 5$.

Die Einwohnerzahlen verhalten sich nach einem Jahr wie

3 : 5

2 P.

(b) Gegen welchen Grenzwert (Gleichgewicht) strebt das Verhältnis der Einwohnerzahl von A zur Einwohnerzahl von B, wenn es "ewig" so weitergeht?

Lösung Die Markovsche Übergangsmatrix ist $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{bmatrix}$.

Sei $x \in \mathbf{R}^2$ der Bevölkerungsvektor der Gleichgewichtslage.

Es gilt $Mx = x$, d.h. x ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Z.B. ist $x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein solcher Eigenvektor. $x_1 : x_2 = 1 : 2$.

Die Einwohnerzahlen verhalten sich "am Ende" wie

1 : 2

8 P.

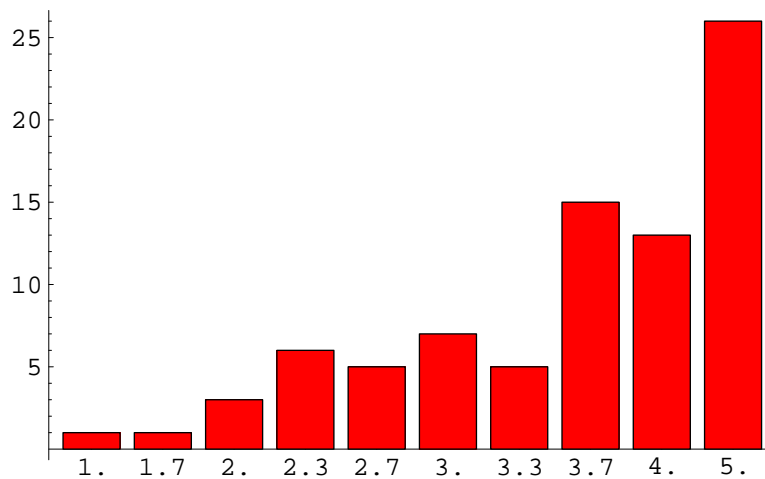


Abbildung 1: Notenverteilung. 82 Teilnehmer (146 Anmeldungen).