

1. (18.06, Quiz 2) Gegeben ist die *Markov-Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Sie ist symmetrisch und hat einen doppelten Eigenwert.

(a) Finde ihre drei Eigenwerte und alle reellen Eigenvektoren.

(b) Finde $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

Hinweis Man kann mit $S\Lambda S^{-1}$ arbeiten und muss nicht jede Komponente berechnen.

2. ([1], Ex.6.3.4) *Populationsdynamik*

Hasenpopulation $h(t)$ und Fuchspopulation $f(t)$ entwickeln sich nach

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h &= 6h - 2f \\ \frac{d}{dt}f &= 2h + f \end{aligned}$$

(a) Finde Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix.

(b) Welche Populationen hat man zur Zeit t im Falle der Anfangswerte $h(0) = f(0) = 30$?

(c) Ist das Verhältnis Hase/Fuchs nach langer Zeit 1:2 oder 2:1?

3. ([1], Ex.6.3.5) *Diffusion*

In zwei Räumen, die durch eine Türe verbunden sind, befinden sich zu Beginn $v(0) = 30$ bzw. $w(0) = 10$ Personen. Die Türe wird geöffnet und die Leute strömen von Raum zu Raum proportional zur Differenz $v - w$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v &= w - v \\ \frac{d}{dt}w &= v - w \end{aligned}$$

(a) Zeige: $v + w$ ist konstant.

(b) Finde die Systemmatrix und ihre Eigenwerte und Eigenvektoren.

(c) Berechne $v(1)$ und $w(1)$.

Literatur

- [1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.