Die Aufgaben stammen aus der 18.06-Abschlussprüfung des Jahres 2005 (siehe `http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-06Spring-2005/Exams/index.htm`).

1. (a) Ich suche ein Beispiel mit einer $m \times n$-Matrix A und Vektoren b, c derart, dass

   i. $Ax = b$ keine Lösung und

   ii. $A^T y = c$ genau eine Lösung

   hat.

   Warum kann ich kein solches Beispiel finden?

   Lösung Betrachten wir die beiden fundamentalen Unterräume $C(A)$ und $N(A^T)$. Die Summe ihrer Dimensionen ist m. Wenn $Ax = b$ keine Lösung hat, ist $b \notin C(A)$, also ist $\dim C(A) < m$ und folglich muss $\dim N(A^T) > 0$ sein. Wenn aber $A^T y = c$ genau eine Lösung haben soll, muss $N(A^T) = \{0\}$, also $\dim N(A^T) = 0$ sein. Beides passt nicht zusammen. Also kann es die geschilderte Situation nicht geben.

   (b) Wir befinden uns in $\mathbf{R}^m$. Angenommen, ich gebe Ihnen Vektoren b und p und linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ und behaupte, dass p die Projektion von b auf den von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten Unterraum ist.

   Wie prüfen Sie nach, ob meine Behauptung wahr ist?

   Lösung Sei U der von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugte Unterraum.

   In Übungsgruppen gibt es hierzu verschiedene typische Lösungsvorschläge, auf die ich hier eingehe, weil sie recht interessant sind. Vor allem ist interessant, warum sie nicht auf Anhieb funktionieren.

   Die Aufgabe lautet: Weise nach, dass p die Projektion von b auf U ist.

   Ein erster Lösungsvorschlag lautete: Wir prüfen, ob $(b-p)^T p = 0$ ist. Wenn ja, wissen wir, dass $(b-p) \perp p$ ist. Stimmt. Aber wer sagt denn, dass p in U liegt?

   Gut, das kann man zusätzlich prüfen. Z.B. indem man die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ als Spalten in eine Matrix A einträgt und prüft, ob $Ax = p$ lösbar ist. Wenn ja, wissen wir, dass $p \in U$ ist. Sind wir dann fertig? Nein! Denn es kann sein, dass $(b-p) \perp p$ und $Ax = p$ gilt und trotzdem p nicht die Projektion von b ist. Wir haben in der Übung gesehen, wie das aussieht, nämlich so: $b - p$ steht zwar senkrecht auf p und p liegt in U, aber $b - p$ steht nicht senkrecht auf U (man kann die Anordnung $b, b-p, p$ um p als Drehachse schwenken).

   Wenn p eine Projektion von b auf U sein soll, muss man also auch noch prüfen, ob $b - p$ senkrecht auf U steht. Das ist dann der Fall, wenn $(b-p)^T a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Denn dann ist $(b-p)^T a = 0$ für jede Linearkombination a der a_i.

   Nun ist aus der vermeintlich schnellen Lösung ein Mehrpunkteprogramm geworden. Man kann es ausführen und weiß am Schluss, ob die Behauptung wahr ist oder nicht.

   Man kann stattdessen aber auch prüfen, ob $A(A^T A)^{-1} A^T b = p$ ist. $A(A^T A)^{-1} A^T$ ist nämlich der Projektor auf $U = C(A)$. Alle oben genannten Einzelprüfungen sind hierin enthalten!

2. (a) Welche Determinante hat

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

(b) Für die 5×5-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gilt:

i. $A - I$ hat Rang ______

ii. und die Spur von A ist ______.

Benutzen Sie diese Fakten, um die fünf Eigenwerte von A zu bestimmen.

(c) Geben Sie die $(3,1)$- und $(1,3)$-Komponente von A^{-1} an.

Lösung

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\,.$$

(b) i. $A - I$ hat Rang 1

ii. und die Spur von A ist 10.

Wir benutzen diese Fakten, um die fünf Eigenwerte von A zu bestimmen.

Wenn $A - I$ Rang 1 hat, ist $A - I$ singulär. Schreibt man $A - I$ als $A - 1 \cdot I$, dann sieht man deutlich: 1 ist ein Eigenwert von A. Screibt man die Matrix $A - I$ explizit hin, sieht man, dass $\dim N(A - I) = 4$ ist. Somit gibt es vier linear unabhängige Eigenvektoren x_1, x_2, x_3, x_4 zum Eigenwert 1 ("vierfacher Eigenwert"). D.h. wir haben $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ gefunden. Der fünfte Eigenwert folgt aus $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 10$, nämlich: $\lambda_5 = 6$.

(c) Die $(3,1)$- und $(1,3)$-Komponente von A^{-1} sind gleich, weil A^{-1} symmetrisch ist.

Die Symmetrie von A^{-1} sieht man folgendermaßen: Für jede invertierbare Matrix gilt, dass die Transponierte ihrer Inversen die Inverse ihrer Transponierten ist, denn $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$. Man hat also immer $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. Ist A zudem symmetrisch, so vereinfacht sich die letzte Gleichung zu $(A^{-1})^T = A^{-1}$ und man sieht die Symmetrie von A^{-1}.

Nun zur eigentlichen Aufgabe: Eine gute Methode, die $(3,1)$-Komponente von A^{-1} zu bestimmen, ist, sie der Beziehung $A^{-1} = (\det A)^{-1} C^T$ zu entnehmen, wobei C die Cofaktorenmatrix bezeichnt.

$A = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow \det A = (\det S)(\det \Lambda)(\det S^{-1}) = \det \Lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_5 = 6.$
Die $(3,1)$-Komponente von C^T ist die $(1,3)$-Komponente von C, also C_{13}:

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\,.$$

"Zufällig" ist uns die hierin enthaltene Determinante schon aus (2a) bekannt.
Die gesuchten Komponenten von A^{-1} haben den Wert $-1/6$.

3. (a) Ergänzen Sie die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$$

so, dass sie Eigenvektoren $x_1 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $x_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ hat.

Lösung Wegen $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ muss $2 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = \lambda_1 \cdot 3$ sein. Also ist $\lambda_1 = 4$. Analog schließt man aus $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, dass $2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = \lambda_2 \cdot 2$ sein muss, woraus $\lambda_2 = 5$ folgt. Die Spur einer Matrix ist gleich der Summe ihrer Eigenwerte, daher weiß man $(\lambda_1 + \lambda_2 = 9)$ bis jetzt:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \_ & 7 \end{bmatrix}.$$

A ist diagonalisierbar, damit $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 20$. Damit berechnet man die noch fehlende Komponente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

(b) Finden Sie eine von A verschiedene Matrix B, die die selben Eigenvektoren x_1, x_2 wie A und Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ hat.

Lösung Sei $S = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ die Eigenvektormatrix. $S^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-2}{2} \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. $A = S\left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right]S^{-1}$.
$B = S\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]S^{-1}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 0$ und zugehörige Eigenvektoren x_1, x_2. $B = \left[\begin{smallmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right]$

(c) Geben Sie B^{10} an.

Lösung Wegen $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]^{10} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ ist $B^{10} = S\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]^{10} S^{-1} = B$.

4. Sei S ein vierdimensionaler Unterraum des $\mathbf{R}^7$ und P die Projektionsmatrix auf S.

(a) Wie lauten die sieben Eigenwerte von P?

Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ und $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$.

(b) Beschreiben Sie sämtliche zugehörige Eigenvektoren.

Lösung Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ sind alle Vektoren $\neq 0$ in $U = C(P)$.
Eigenvektoren zu $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7$ sind alle Vektoren $\neq 0$ in $N(P)$.

5. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine Permuationsmatrix P derart, dass

$$B = PAP^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

gilt.

Lösung Man kann das gewünschte Ergebnis herstellen, indem man die mittleren beiden Zeilen und die mittleren zwei Spalten von A tauscht. Also ist

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die geeignete Permutationsmatrix. Sie hat die besondere Eigenschaft $P^{-1} = P^T = P$ (brauchen wir später).

(b) Welche vier Eigenwerte hat B? Ist B diagonalisierbar?

Lösung

$$\det(B - \lambda I) = \left(\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda-3)^2,$$

also hat B die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = 3$.

(c) Woher weiß man, dass A und B die gleichen Eigenwerte haben?

Lösung Dies sieht man so:

$\det(A - \lambda I) = \det P \det(A - \lambda I) \det P^T = \det(PAP^T - \lambda PP^T) = \det(B - \lambda I)$.

6. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

A ist singulär.

(a) Beschreiben Sie alle Vektoren, die orthogonal zum Nullraum von A sind.

Lösung Der Raum aller Vektoren, die orthogonal zum Nullraum $N(A)$ sind, ist der *Zeilenraum* $C(A^T)$.

(b) Welche orthonormalen Vektoren liefert das Gram-Schmidt-Verfahren, wenn man es auf die Spalten von A anwendet?

Lösung Seien a, b, c die Spalten von A. Eine Besonderheit ist, dass $c = a + 2b$ gilt (in der Angabe steht ja bereits, dass A singulär ist).
Das Gram-Schmidt-Verfahren lautet allgemein

$$A = a\,, \quad B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A\,, \quad C = c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B\,,$$
$$q_1 = \tfrac{1}{\|A\|} A\,, \quad q_2 = \tfrac{1}{\|B\|} B\,, \quad q_3 = \tfrac{1}{\|C\|} C\,.$$

Im vorliegenden Fall wissen wir, dass $C = 0$ herauskommt, weil c eine Linearkombination von a und b ist. Die Berechnung von C und q_3 können wir uns also schenken.
Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert mit den gegebenen Daten:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\,, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\,.$$
$$q_1 = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\,, \quad q_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\,.$$

(c) Finden Sie eine “reduzierte” LU-Zerlegung von A, in der L zwei Spalten und U zwei Zeilen hat.

Lösung Umformung der Matrix A zu U (Elimination):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U\,.$$

Die übliche LU-Zerlegung würde also lauten:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\,.$$

Wegen der Nullzeile in U kann man stattdessen auch einfacher schreiben:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}\,. \tag{1}$$

(d) Schreiben Sie A als Summe zweier Rang-1-Matrizen.

Lösung In (1) sind die gesuchten Rang-1-Matrizen bereits enthalten (s. Lec.11):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 14 \\ 2 & 6 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}\,. \end{aligned}$$