Aus einer alten Prüfung...

1. Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert

$$q_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad q_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Beschreiben Sie alle möglichen Eingabevektoren a_1 und a_2.

Lösung $a_1 \in \{xq_1 \mid x > 0\}$, $a_2 \in \{xq_1 + yq_2 \mid x \text{ beliebig}, y > 0\}$.

2. Seien $a, b \in \mathbf{R}^n$, $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Für welche Zahl x ist das Abstandsquadrat

$$||b - xa||^2$$

minimal?

Lösung Gesucht ist die Minimumsstelle von $f(x) = ||b - xa||^2$.

$f(x) = (b - xa)^T(b - xa) = ||b||^2 - xb^Ta - xa^Tb + x^2||a||^2 = ||b||^2 - 2xa^Tb + x^2||a||^2$.

$f'(x) = -2a^Tb + 2x||a||^2$.

$f'(x) = 0$ für $x = a^Tb/||a||^2$ (Minimumsstelle!).

$f(a^Tb/||a||^2) = ||b - \frac{aa^T}{a^Ta}b||^2 = ||b -$Projektion von b auf $a||^2 =$ (Länge des Lotes von b auf $a)^2$.

Wer's weiß, kann natürlich gleich den letzten Ausdruck berechnen.

3. Finden Sie die Projektion (den "Schatten") p des Vektors $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$ auf die Ebene $x + y + z = 0$ in $\mathbf{R}^3$.

Tipp Man kann mit einer Basis für den zweidimensionalen Unterraum arbeiten, noch besser mit einer orthogonalen oder orthonormalen Basis.

Lösung Eine Basis von $N(A)$ ist $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$, eine orthogonale Basis $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$, eine orthonormale Basis $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{smallmatrix}\right] \right\} =: \{q_1, q_2\}$. (Probe: für alle Basisvektoren muss die Summe ihrer Komponenten null sein.)

Wir arbeiten mit $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}$ und berechnen den Projektor $P = QQ^T$:

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nun können wir p berechnen:

$$p = Pb = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Geben Sie die Determinanten von A und A^{-1} und das Element in Zeile 1, Spalte 2 von A^{-1} an für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Lösung $\det A = \det \begin{bmatrix} 1&1&0\\1&2&3\\1&3&7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1&1&0\\0&1&3\\0&2&7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1&1&0\\0&1&3\\0&0&1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = 1/\det A = 1.$

Die zweite Spalte von A^{-1} ist genau der Vektor x, der die Gleichung $Ax = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}$ erfüllt.

Von diesem x benötigen wir die erste Komponente:

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\1&1&0&0\\0&2&1&3\\0&3&1&7 \end{bmatrix}}{\det A} = -\det \begin{bmatrix} 0&1&0\\2&1&3\\3&1&7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2&3\\3&7 \end{bmatrix} = 5$$

5. Berechnen Sie die Determinante von

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

rekursiv oder mit Cofaktoren oder sonstwie.

Lösung Die Summe der Spalten von C ist null $\Rightarrow$ C ist singulär $\Rightarrow$ $\det C = 0$.

6. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

und sei P_1 der Projektor auf den eindimensionalen Unterraum, der von der ersten Spalte von A aufgespannt wird. Sei P_2 der Projektor auf den Spaltenraum von A.

Wie lautet das Produkt P_2P_1? (Nicht zu viel rechnen!)

Lösung P_2P_1 steht für die Hintereinanderausführung der Projektionen P_1 und dann (in dieser Reihenfolge!) $P2$. Da das Bild unter P_1 schon im Spaltenraum von $C(A)$ liegt, bewirkt die nachfolgende Projektion P_2 keine Veränderung, d.h. $P_2P_1 = P_1$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1\\2\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&2&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&0&1\\2&4&0&2\\0&0&0&0\\1&2&0&1 \end{bmatrix}.$$