1. ([1], Ex 4.1.3) Konstruiere jeweils eine Matrix A mit den angegebenen Eigenschaften oder erkläre, warum es nicht möglich ist.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A)$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A^T)$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$.

   (c) $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist lösbar und $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (d) Jede Zeile ist zu jeder Spalte orthogonal und A ist nicht die Nullmatrix.

   (e) Addiert man alle Spalten, erhält man einen Nullvektor, addiert man alle Zeilen, erhält man eine Zeile mit lauter 1en.

   Lösung

   (a) Z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.

   (b) Wenn $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A^T)$ ist, gibt es ein y mit $y^T A = [\,2\ -3\ 5\,]$.
   Dann ist $(y^T A) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\,2\ -3\ 5\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$.
   Andrerseits ist $y^T (A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = y^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Widerspruch!

   (c) Z.B. $A = I$.

   (d) Z.B. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (e) Angenommen, $[\,1 \ldots 1\,] A = [\,1 \ldots 1\,]$ und $A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Dann ist einerseits $[\,1 \ldots 1\,] A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [\,1 \ldots 1\,] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + \ldots + 1$,
   andrerseits $[\,1 \ldots 1\,] A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [\,1 \ldots 1\,] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Widerspruch!

2. ([1], Ex 4.1.14) Der Fußboden V und die Wand W sind keine orthogonalen Unterräume, denn sie haben einen Vektor $\neq 0$ in der Fußbodenleiste gemeinsam. Zwei Ebenen in $\mathbf{R}^3$ können nicht orthogonal sein!
   Finde einen gemeinsamen Vektor $\neq 0$ von $C(A)$ und $C(B)$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

   Lösung Löse $Ax = By$, d.h. $[\,A\ -B\,] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$. Man findet die nichttriviale Lösung $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Also ist $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A) \cap C(B)$.

3. ([1], Ex 4.1.17) Sei S ein Unterraum von $\mathbf{R}^3$. Bestimme jeweils $S^\perp$.

   (a) $S = \{0\}$.

   (b) S wird von $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ aufgespannt.

   (c) S wird von $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ aufgespannt.

Lösung

(a) $S^{\perp} = \mathbf{R}^3$.

(b) $S^{\perp}$ wird (z.B.) von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ aufgespannt.

(c) $S^{\perp}$ wird (z.B.) von $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ aufgespannt.

4. ([1], Ex 4.1.24) A sei eine invertierbare $n \times n$-Matrix: $AA^{-1} = I$. Dann ist die erste Spalte von A^{-1} orthogonal zum Unterraum, der von welchen Zeilen von A aufgespannt wird?

   Lösung Von den Zeilen 2 bis n.

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.