

1. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 20 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ -1 & -3 & 0 & -4 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

(a) Finden Sie eine Basis des Spaltenraums $C(A)$.

Lösung Wir bezeichnen die Spalten von A mit v_i :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

$\{v_1, \dots, v_6\}$ ist ein Erzeugendensystem von $C(A)$, denn $C(A)$ besteht aus sämtlichen Linearkombinationen der v_1, \dots, v_6 . Aber $\{v_1, \dots, v_6\}$ ist kein minimales Erzeugendensystem (und damit keine Basis), denn $\text{rank } A$ kann höchstens 3 sein. Es gibt also "überflüssige" Vektoren in $\{v_1, \dots, v_6\}$. Um herauszufinden, welche, gehen wir zur Zeilenstufenform von A über:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

Erste, dritte und fünfte Spalte von R sind Pivotspalten und es gilt $N\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{0\}$. Damit gilt auch $N([v_1 \ v_3 \ v_5]) = \{0\}$. $\{v_1, v_3, v_5\}$ ist eine Basis von $C(A)$.

Natürlich gibt es unendlich viele weitere Basen!

(b) Finden Sie eine Basis des Nullraums $N(A)$.

Lösung Erinnern Sie sich, wie wir den Lösungsraum für $Ax = 0$ konstruiert haben: In x eine "freie Position" 1 setzen, die anderen "freien Positionen" 0 setzen und die Koeffizienten der "Pivot-Positionen" berechnen. Man erhält so viele verschiedene Vektoren wie es "freie Positionen" gibt. Diese bilden eine Basis von $N(A)$, denn sie sind linear unabhängig und ihre Linearkombinationen erzeugen $N(A)$.

Man erhält (leichter mit R als mit A) die Basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Finden Sie eine Basis des Zeilenraums $C(A^T)$.

Lösung Die Zeilenräume $C(A^T)$ und $C(R^T)$ sind gleich. Die Zeilen von R sind erkennbar linear unabhängig (außerdem weiß man, dass $\text{rank } R = 3$ ist) und bilden die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Finden Sie eine Basis des linken Nullraums $N(A^T)$.

Lösung Die Zeilen von A (und R) sind linear unabhängig. Also ist $N(A^T) = \{0\}$. Eine Basis (die einzige!) von $\{0\}$ ist \emptyset .

2. Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 20 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 20 \end{bmatrix}$$

(a) Finden Sie eine Basis des Spaltenraums $C(B)$.

Lösung Wir bringen B auf Zeilenstufenform

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und lesen ab: Spalten 1 und 3 sind Pivot-Spalten; die anderen Spalten sind freie Spalten. Spalten 1 und 3 von B bilden eine Basis von $C(B)$. Sie lautet

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Finden Sie eine Basis des Nullraums $N(B)$.

Lösung Mit der "wandernden Eins" erhalten wir die Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Finden Sie eine Basis des Zeilenraums $C(B^T)$.

Lösung Wir lesen eine Basis direkt von R ab:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Finden Sie eine Basis des linken Nullraums $N(B^T)$.

Lösung $\text{rank } R^T = 2$, als hat $N(B^T)$ die Dimension 1. Die letzte Spalte von R^T ist der Nullvektor, also ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

eine Basis von $N(B^T)$.

3. (Mathematica-Aufgabe) Erzeugen Sie eine Matrix M durch

```
M=Table[Random[Integer,{-64,64}],{7},{11}]
```

und finden Sie eine Basis für

- (a) den Spaltenraum $C(M)$,
- (b) den Nullraum $N(M)$,
- (c) den Zeilenraum $C(M^T)$,
- (d) den linken Nullraum $N(M^T)$.