1. (Nach [1], Problem 2.2.39) Entscheiden Sie, ob bei einem (1×3)-System $Ax = 5$ folgende Situtation möglich ist: $\left[\begin{smallmatrix}2\\0\\0\end{smallmatrix}\right]$ ist eine partikuläre Lösung des Problems und $\left\{ c \left[\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right] \middle| c \in \mathbf{R} \right\}$ ist der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Problem.

   Lösung Unmöglich. Das System hat eine Pivotspalte (nämlich die erste Spalte) und zwei freie Spalten. Der Lösungsraum muss von zwei Vektoren aufgespannt werden; einer reicht nicht.

2. (Nach [1], Problem 2.2.40) Das Problem $Ax = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right]$ habe (unter anderem) die Lösungen $\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix}2\\2\\5\end{smallmatrix}\right]$.

   (a) Geben Sie zwei verschiedene Lösungen des zugehörigen homogenen Problems $Ax = 0$ an.

   (b) Finden Sie eine dritte Lösung des zugehörigen homogenen Problems.

   Lösung Viele Lösungen sind denkbar; eine sieht so aus:

   (a) $\left[\begin{smallmatrix}2\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix}2\\2\\5\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}0\\-3\\-7\end{smallmatrix}\right]$ ist eine Lösung von $Ax = 0$.
   Der Nullvektor $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right]$ ist eine weitere Lösung von $Ax = 0$.

   (b) $\frac{1}{2} \cdot \left[\begin{smallmatrix}0\\-3\\-7\end{smallmatrix}\right]$ ist eine dritte Lösung von $Ax = 0$.

3. ([1], Problem 2.2.44) Seien

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}.$$

   Für welche q ist (falls dies überhaupt möglich ist) der Rang (d.h. die Anzahl der Pivotspalten) von A bzw. B

   (a) 1,

   (b) 2,

   (c) 3?

   Lösung Formt man A bzw. B elementar um, so erhält man die Matrizen

$$A' = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & q-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 - q/3 & 0 \end{bmatrix}$$

   Man sieht

   (a) $\operatorname{rank}(A) = 1$ für $q = 3$; $\operatorname{rank}(B) = 1$ für $q = 6$.

   (b) $\operatorname{rank}(A) = 2$ für $q \neq 3$; $\operatorname{rank}(B) = 2$ für $q \neq 6$.

   (c) $\operatorname{rank}(A) = 3$ ist unmöglich; $\operatorname{rank}(B) = 3$ ist unmöglich.

4. Gegeben sind

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 8 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Gesucht ist eine Lösung x des Problems $Ax = b$ mit $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 8$.

Lösung

```
Mathematica 5.1 for Linux
Copyright 1988-2004 Wolfram Research, Inc.
 -- Motif graphics initialized --

In[1]:= A = {{0, -1, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, -1, 2, -1, 0, 2, -1}, {1, 1, 0,
        2, 1, -1, 0, 0, 2}, {-1, -1, 0, 0, -1, 2, 2, 0, -1}, {-1, 2, 0, 1, 1,
        0, 2, -1, 1}};

In[2]:= b = {8, -2, 8, 3, -3};

In[3]:= xp = LinearSolve[A, b]

         9     35   15  11  13
Out[3]= {--, -(--), --, --, --, 0, 0, 0, 0}
         16    8    8   2   16

In[4]:= {xn1, xn2, xn3, xn4} = NullSpace[A]

Out[4]= {{-9, -10, 2, -8, 3, 0, 0, 0, 16}, {-1, 6, -6, 0, -5, 0, 0, 8, 0},

>    {13, 2, -10, -8, 1, 0, 8, 0, 0}, {15, 6, -14, -8, 11, 16, 0, 0, 0}}

In[5]:= x = xp + (1/2)xn1 + xn2 + xn3 + (1/2)xn4

         249  13    161      21   61
Out[5]= {---, --, -(---), -(--), --, 8, 8, 8, 8}
         16   8      8       2    16

In[6]:= A.x == b

Out[6]= True
```

Literatur

[1] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications.* Thomson Books, fourth edition, 2006.