

Um eine LU -Zerlegung von einer Matrix A zu erhalten, reichen manchmal elementare Zeilenumformungen von Typ "Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen" nicht aus. Man braucht dann einen weiteren Umformungstyp, nämlich die Umformung "Zeilentausch". Wie sehen Zeilentauschmatrizen aus?

1. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 13 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Versuchen Sie, eine LU -Zerlegung von A zu finden. Falls es nicht geht wie gewohnt, finden Sie eine Matrix P , die die Zeilen von A vorab geeignet vertauscht, so dass

$$A' = PA \quad (2)$$

eine LU -Zerlegung hat.

(a) Wie lautet P ?

Lösung

Mathematica 5.1 for Linux

Copyright 1988-2004 Wolfram Research, Inc.

-- Motif graphics initialized --

In[1]:= A = {{0, 0, 13}, {1, 4, 6}, {2, 9, 13}};

In[2]:= P12 = {{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}};

In[3]:= P12.A

Out[3]= {{1, 4, 6}, {0, 0, 13}, {2, 9, 13}}

In[4]:= E31 = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {-2, 0, 1}};

In[5]:= E31.P12.A

Out[5]= {{1, 4, 6}, {0, 0, 13}, {0, 1, 1}}

In[6]:= P23 = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};

In[7]:= P23.E31.P12.A

Out[7]= {{1, 4, 6}, {0, 1, 1}, {0, 0, 13}}

In[8]:= P=P23.P12

Out[8]= {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 0, 0}}

(b) Wie lautet die LU -Zerlegung von A' ?

Lösung

```
In[9]:= A'=P.A
```

```
Out[9]= {{1, 4, 6}, {2, 9, 13}, {0, 0, 13}}
```

```
In[10]:= MatrixForm[%]
```

```
Out[10]//MatrixForm= 1   4   6
                      2   9  13
                      0   0  13
```

```
In[11]:= L={{1,0,0},{2,1,0},{0,0,1}};
```

```
In[12]:= U={{1,4,6},{0,1,1},{0,0,13}};
```

```
In[13]:= A'==L.U
```

```
Out[13]= True
```

(c) Wie lautet die LDU -Zerlegung von A' ?

Lösung

```
In[14]:= Diag=DiagonalMatrix[{1, 1, 13}];
```

```
In[15]:= U'={{1,4,6},{0,1,1},{0,0,1}};
```

```
In[16]:= A'==L.Diag.U'
```

```
Out[16]= True
```

2. Fortsetzung von Aufgabe 1.

(a) Wie lautet die LDU -Zerlegung von A'^T ?

Lösung

```
In[17]:= Transpose[A']==Transpose[U'] . Transpose[Diag] . Transpose[L]
```

```
Out[17]= True
```

(b) Wie lautet die LDU -Zerlegung von A^T ?

Lösung

fehlt

3. (a) Zählen Sie alle 3×3 -Permutationsmatrizen auf.

Lösung

Mathematica 5.1 for Linux

Copyright 1988-2004 Wolfram Research, Inc.

-- Motif graphics initialized --

In[1]:= P1={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}

Out[1]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[2]:= P2={{0,1,0},{1,0,0},{0,0,1}}

Out[2]= {{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 1}}

In[3]:= P3={{1,0,0},{0,0,1},{0,1,0}}

Out[3]= {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}}

In[4]:= P4={{0,0,1},{0,1,0},{1,0,0}}

Out[4]= {{0, 0, 1}, {0, 1, 0}, {1, 0, 0}}

In[5]:= P5={{0,0,1},{1,0,0},{0,1,0}}

Out[5]= {{0, 0, 1}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0}}

In[6]:= P6={{0, 1, 0},{0, 0, 1}, {1, 0, 0}}

Out[6]= {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 0, 0}}

- (b) Wie lauten ihre Inversen?

Lösung Für Permutationen gilt generell $P^{-1} = P^T$.