

Die folgenden Aufgaben bearbeiten Sie am besten mit Mathematica.

1. Gegeben ist die invertierbare quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -8 & -2 & -10 \\ 5 & 9 & 9 & 9 \\ -9 & -8 & -4 & -4 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

A kann durch elementare Zeilenumformungen von Typ "Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile" in eine obere Dreiecksmatrix (englisch *upper triangular matrix*)

$$U = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad (2)$$

übergeführt werden (* steht hier für eine geeignete reelle Zahl). Man halte sich dabei strikt an folgende Reihenfolge: Erst wird die Position "Zeile 2, Spalte 1" auf Null gebracht, dann die Position "Zeile 3, Spalte 1", dann die Position "Zeile 4, Spalte 1", dann die Position "Zeile 3, Spalte 2" usw.. Die verwendeten Umformungsmatrizen taufe man entsprechend E_{21} , E_{31} , E_{41} , E_{32} , E_{42} , E_{43} .

Wir haben nun:

$$\underbrace{E_{43} E_{42} E_{32} E_{41} E_{31} E_{21}}_{=L^{-1}} A = U. \quad (3)$$

2. Fortsetzung von Aufgabe 1. Die Matrix $E_{43} E_{42} E_{32} E_{41} E_{31} E_{21}$ in (3) ist die Inverse einer Matrix

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

- Wie lautet L ?
- Können Sie an L die einzelnen Umformungsschritte aus Aufgabe 1 erkennen?
- Stellen Sie die Regel auf, die beschreibt, wie man L direkt hinschreiben kann, während man A zu U umformt.

Wir haben nun die LU -Zerlegung von A :

$$A = LU, \quad (5)$$

wobei L eine "untere Dreiecksmatrix" (*lower triangular matrix*) und U eine "obere Dreiecksmatrix" (*upper triangular matrix*) ist.

3. Fortsetzung von Aufgabe 2. Wir können (5) verfeinern zu

$$A = LDU', \tag{6}$$

wobei D eine Diagonalmatrix (d.h. eine Matrix, die nur auf der Hauptdiagonalen Elemente $\neq 0$ hat) und U' eine obere Dreiecksmatrix ist, die auf der Hauptdiagonalen nur Einsen hat.

4. Haben Sie eine Idee, wie man sich mit Hilfe von (6) ohne viel zu rechnen eine LU -Zerlegung der Transponierten A^T verschaffen kann?

Hinweis Es gilt generell $(AB)^T = B^T A^T$.

5. Mit Mathematica kann man sich die LU -Zerlegung einer Matrix A direkt ausrechnen lassen. Suchen Sie den geeigneten Aufruf und finden Sie die LU -Zerlegung von A aus (1) bzw. ihrer Transponierten A^T .