Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

(Evans, An Introduction to Stochastic differential equations, Version 1.2., Chapter 5, B)

Section 1

1-dimensionales (B):

$$dX(t) = b(X(t))\,dt + dW(t)$$
$$X(0) = x.$$

hierbei sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einmal stetig diffbar und $|b'| \leq L$ (d.h.: beschränkte Ableitung)

In Integralform:

$$X(t) = x + \int_0^t b(X(s))\,ds + W(t) \qquad (t \geq 0)$$

Idee:
Iterative Lösung:

$$X^0(t) = x \quad \forall_{t \geq 0}$$

$$X^{n+1}(t) = x + \int_0^t b(X^n(s))\,ds + W(t)$$

Abstand zwischen zwei Approximierenden:

$$D^n(t) = \max_{0\le s\le t} \left| X^{n+1}(s) - X^n(s) \right|$$

$$D^0(t) = \max_{0\le s\le t} \left| \underbrace{\int_0^s \underset{\text{fest}}{\overset{\uparrow}{b(x)}}\, dr}_{b(x)s} + W(s) \right| \le \underset{\text{hängt von } \omega \text{ ab!}}{\overset{\text{für alle } 0\le t\le T}{C}}$$

Es gilt $\quad D^n(t) \le C\cdot \frac{L^n}{n!} t^n \quad$ für alle n

und

für alle $0\le t\le T$

denn: $$D^n(t) = \max_{0\le s\le t} \left| \int_0^s b(X^n(r)) - b(X^{n-1}(r))\, dr \right|$$

$$\le \int_0^t \max_{0\le s'\le s} \underbrace{\left| b(X^n(s')) - b(X^{n-1}(s')) \right|}_{\le L\cdot |X^n(s')-X^{n-1}(s')|} ds$$

$$\le L \int_0^t D^{n-1}(s)\, ds .$$

Der Rest folgt mit Induktion:

$$D^0(t) \le C\cdot \frac{L^0}{0!} t^0 \quad \checkmark$$

$$D^{n+1}(t) \le L \int_0^t D^n(s)\, ds \le L\cdot \int_0^t C\cdot \frac{L^n}{n!} s^n\, dt$$

$$= C\cdot \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} .$$

Sei $m \geq n$:

$$|X^m(t) - X^n(t)| = \left|\sum_{k=n}^{m-1} X^{k+1}(t) - X^k(t)\right|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} |X^{k+1}(t) - X^k(t)|$$

$\Rightarrow$

$$\max_{0\leq t\leq T} |X^m(t) - X^n(t)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \underbrace{\max_{0\leq t\leq T} |X^{k+1}(t) - X^k(t)|}_{D^k(T)}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} C \cdot \frac{L^k}{k!} T^k$$

$$\leq C \cdot \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{L^k}{k!} T^k}_{\to\, 0 \text{ für } n\to\infty}$$

Deshalb konvergiert für fast alle Pfade ω die Folge der Prozesse $X^n(\cdot)$ auf $[0,T]$ gleichmäßig gegen einen Grenzprozess $X(\cdot)$:

$$X^{n+1}(t) = x + \int_0^t b(X^n(s))\, ds + dW(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$X(t) = x + \int_0^t b(X(s))\, ds + dW(s)$$

Der Grenzprozess $(X(t))_{t\geq 0}$ löst die Stoch DGL.

Section 2. Solving SDE by changing variables.

SDE. $\begin{cases} dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t) \\ X(0) = x \end{cases}$

SDE' : $\begin{cases} dY(t) = f(Y(t))\,dt + dW(t) \\ Y(0) = y \end{cases}$

Falls SDE' gelöst und $X = u(Y)$,

dann gilt:

$$dX(t) = u'(Y(t))\,dY(t) + \tfrac{1}{2}u''(Y(t))\,dt$$

$$= \left(u'(Y(t))\,f(Y(t)) + \tfrac{1}{2}u''(Y(t))\right)dt$$

$$+ u'(Y(t))\,dW(t)$$

Also löst $(X(t))_{t\geq 0}$ SDE, wenn

$$u'(Y(t)) = \sigma(X(t)) = \sigma(u(Y(t)))$$

und $u'(Y(t))f(Y(t)) + \tfrac{1}{2}u''(Y(t)) = b(X(t)) = b(u(Y(t)))$ ist.

Ferner muss $u(y) = x$ sein.

Daraus ergibt sich eine Möglichkeit, SDE zu lösen, wenn SDE' gelöst ist:

Löse die gewöhnliche DGL

$$\text{ODE} \quad \begin{cases} u'(z) = \sigma(u(z)) & z \in \mathbb{R} \\ u(y) = x \end{cases},$$

dann löse SDE' mit

$$f(z) = \frac{1}{\sigma(u(z))} \left(b(u(z)) - \frac{1}{2} u''(z) \right).$$

Wir können SDE' lösen, falls f die Eigenschaften hat, die b in Section 1 hatte.