[Øksendal, Kap. 5]

Exercise 5.1. Welche SDE wird gelöst?

(i) $X(t) = e^{W(t)}$.

$f(t,x) = e^x, \quad \frac{\partial}{\partial t} f = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f = f, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = f.$

$$\boxed{dX(t) = X(t)\, dW(t) + \frac{1}{2} X(t)\, dt}$$

(ii) $X(t) = \frac{1}{1+t} W(t)$.

$f(t,x) = \frac{1}{1+t} x, \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \frac{-1}{(1+t)^2} x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = \frac{1}{1+t},$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = 0$

$$\boxed{dX(t) = -\frac{1}{1+t} X(t)\, dt + \frac{1}{1+t}\, dW(t)}$$

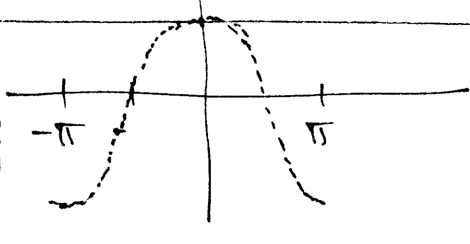
(iii) $X(t) = \sin W(t)$

$f(t,x) = \sin x, \quad \frac{\partial}{\partial t} f = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f = \cos x, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = -f$

$dX(t) = \cos W(t)\, dW(t) - \frac{1}{2} X(t)\, dt$

$$\Rightarrow \boxed{dX(t) = \sqrt{1 - X(t)^2}\, dW(t) - \frac{1}{2} X(t)\, dt}$$

für $t < \inf\{s > 0 \,/\, W(s) \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$



(iv) $$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ e^t W(t) \end{bmatrix}$$

$$dX_1(t) = dt$$

$$dX_2(t) = X_2(t)\,dt + e^t\,dW(t)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} dW(t)}$$

(v) $$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh W(t) \\ \sinh W(t) \end{bmatrix}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} X_2(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} dW(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dW(t)}$$

Exercise 5.2. $$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos W(t) \\ b \sin W(t) \end{bmatrix}$$ Brownsche Bew. auf der Ellipse

$$dX_1(t) = -a \sin W(t)\,dW(t) - \frac{1}{2} X_1(t)\,dt$$

$$= -a \cdot \frac{1}{b} X_2(t)\,dW(t) - \frac{1}{2} X_1(t)\,dt$$

$$dX_2(t) = b \cos W(t)\,dW(t) - \frac{1}{2} b \sin W(t)\,dt$$

$$= b \cdot \frac{1}{a} X_1(t)\,dW(t) - \frac{1}{2} X_2(t)\,dt$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dW(t)}$$

Exercise 5.4.

Löse

(i) $$\boxed{\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix}}$$

$$dX_1(t) = dt + dW_1(t)$$

$$X_1(t) = t + W_1(t) + \underbrace{X_1(0)}_{\text{Anfangswert}}$$

$$dX_2(t) = (t + W_1(t) \overset{+X_1(0)}{\vphantom{x}}) \, dW_2(t)$$

$$X_2(t) = \int_0^t s \, dW_2(s) + \int_0^t W_1(s) \, dW_2(s) + \underbrace{X_2(0)}_{\text{Anfangswert}}$$

$$+ \underbrace{\int_0^t X_1(0) \, dW_2(s)}$$

$$= X_1(0) W_2(t)$$

(ii) $\boxed{dX(t) = X(t)\,dt + dW(t)}$

Integrierender Faktor e^{-t}:

$$e^{-t}dX(t) = e^{-t}X(t)\,dt + e^{-t}dW(t) \qquad (*)$$

$$Y(t) := e^{-t}X(t)$$

$$\underbrace{dY(t)}_{d(e^{-t}X(t))} = -e^{-t}X(t)\,dt + e^{-t}dX(t)$$

$$\Rightarrow e^{-t}dX(t) = d(e^{-t}X(t)) + e^{-t}X(t)\,dt$$

$$(*)\ e^{-t}dX(t) = e^{-t}dW(t) \qquad e^{-t}X(t)\,dt$$

Löse $d(e^{-t}X(t)) = e^{-t}dW(t)$!

Lösg: $e^{-t}X(t) = X(0) + \int_0^t e^{-s}dW(s)$

$$\Rightarrow \quad X(t) = e^{t}X(0) + \int_0^t e^{t-s}dW(s)$$

(iii) $\boxed{dX(t) = -X(t)\,dt + e^{-t}\,dW(t)}$

Vergleiche mit (ii). Setze dort $X(t) = W(t)$:

$$d\big(\underbrace{e^{-t}W(t)}_{=:X(t)}\big) = \underbrace{-e^{-t}W(t)}_{-X(t)}\,dt + e^{-t}\,dW(t)$$

(Anfangswert ist hier $X(0)=0$.
Falls Anfangswert c verlangt, setze $X(t) = e^{-t}(W(t)+c)$:
dann gilt

$$d\cancel{X}(t) = -X(t)\,dt + e^{-t}\,dW(t) \qquad \text{(wie vorher)}$$

und

$$X(0) = \underbrace{W(0)}_{0} + c$$

Exercise 5.5

(a) $\boxed{dX(t) = \mu\,X(t)\,dt + \sigma\,dW(t)}$ (*)

LANGEVIN – Gleichung

Physik: Partikel in Flüssigkeit, $V(t)$ Geschwindigkeit zur Zeit t, $\underset{\text{Masse}}{m}\,dV(t)$ Impulsänderung, $\underbrace{-\beta V(t)\,dt}_{\text{Verzögerung (Kraft) wg. Viskosität}}$

$$\underbrace{\underset{\text{Masse}}{m}\, dV(t)}_{\text{Impuls-änderung}} = \underbrace{-\beta V(t)\, dt}_{\text{Einfluss der Viskosität}} + \underbrace{\sigma\, dW(t)}_{\text{Moment-Transfer durch Kollision mit Flüssigkeits-Molekülen}}$$

(a) Wie löst man (*) ?

Setze $Y(t) := \int_0^t e^{-\mu s} \sigma\, dW(s)$ (ein Itô-Prozess)

$$\Rightarrow \quad dY(t) = e^{-\mu t} \sigma\, dW(t)$$

Setze $X(t) = e^{\mu t} Y(t)$

$$\Rightarrow \quad dX(t) = \mu X(t)\, dt + e^{\mu t}\, dY(t)$$

$$= \mu X(t)\, dt + \underbrace{e^{\mu t} e^{-\mu t}}_{1} \sigma\, dW(t)$$

$$= \mu X(t)\, dt + \sigma\, dW(t)$$

$$X(t) = e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} \sigma\, dW(s) = \sigma \int_0^t e^{\mu(t-s)}\, dW(s)$$

löst (*) für $X(0) = 0$

Exercise 5.5. (b)

Welchen Erwartungswert hat der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess?

$$\left.\begin{array}{l}(X(t))_{t\geq 0} \text{ ist ein Martingal} \\ X(0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad E\,X(t) = 0 \quad \forall t$$

Welche Varianz hat der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess?

$$\operatorname{Var} X(t) = E\,X(t)^2$$

$$= e^{+2\mu t}\, E\,Y(t)^2$$

$$= e^{+2\mu t} \sigma^2 E\left(\int_0^t e^{-\mu s}\, dW(s)\right)^2$$

$$\underset{\text{Itô-Isometrie}}{=} e^{+2\mu t} \sigma^2 \int_0^t e^{-2\mu s}\, ds$$

$$= e^{+2\mu t} \sigma^2 \cdot \frac{1}{-2\mu} e^{-2\mu s}\Big|_0^t$$

$$= e^{+2\mu t} \sigma^2 \cdot \frac{1}{2\mu}\left(1 - e^{-2\mu t}\right) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{2\mu}\left(e^{2\mu t} - 1\right)$$

Noch einmal zurück zum Vasicek-Modell:

$$\boxed{dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dt + \sigma\, dW(t)} \quad \text{(VASICEK)}$$

Anfangswert $R(0)$.

Lösungsansatz (schon gesehen):

$$R(t) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$$

$$= f(t, X(t))$$

$$\text{mit } f(t,x) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} x$$

$$\text{und } X(t) = \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = -\beta e^{-\beta t} R(0) + \cancel{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\cancel{\beta}} e^{-\beta t} - \beta \sigma e^{-\beta t} x$$

$$= \alpha - \beta f(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = \sigma e^{-\beta t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = 0$$

und

$$dX(t) = e^{\beta t} dW(t).$$

Es gilt

$$dR(t) = df(t, X(t)) = (\alpha - \beta f(t, X(t)))\, dt + \sigma e^{-\beta t} dX(t)$$

$$= (\alpha - \beta \underbrace{f(t, X(t))}_{R(t)})\, dt + \sigma\, dW(t)$$

d.h. (VASICEK) ist erfüllt.

$(R(t))_{t\geq 0}$ ist ein Itô-Prozess:

$$R(t) = \cancel{e^{-\beta t}} \cdot$$

$$R(0) + \int_0^t \left(-\beta e^{-\beta s} R(0) + \alpha e^{-\beta s}\right) ds + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$$

$$= R(0) + \int_0^t (\alpha - \beta R(0))\, e^{-\beta s}\, ds + \sigma e^{-\beta t} \underbrace{\int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)}_{\substack{\text{ein Itô-Integral} \\ \text{mit einem} \\ \text{deterministi-} \\ \text{schen Integrand}}}$$

Untersuchung von $\int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$:

$$E \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s) = 0$$

(betrachte approximierende Summenausdrücke)

oder: Martingal-Argument
besser

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Itô-Isometrie}}}{=} \int_0^t e^{2\beta s}\, ds = \frac{1}{2\beta}\left(e^{2\beta t} - 1\right)$$

$I(t) = \int_0^t e^{\beta s} \, dW(s)$ ist normalverteilt:

$E\, I(t) = 0$

$Var\, I(t) = E \int_0^t e^{2\beta s} ds$

$= \int_0^t e^{2\beta s} ds$

Nachweis geschieht dadurch, dass man zeigt, dass die momentenerzeugende Funktion

$$E\, e^{u I(t)} = \underbrace{e^{\frac{1}{2} u^2 Var\, I(t)}}_{\text{momenterzeugende Fkt.}} \quad ⊛$$

ist: einer $\mathcal{N}(0, \sqrt{Var\, I(t)})$-verteilten ZVn

$$\text{Betrachte } E\, e^{\overbrace{u I(t) - \frac{1}{2} u^2 Var\, I(t)}^{X(t)}} = E \underbrace{e^{X(t)}}_{S(t)}$$

$$S(t) = S(0) e^{X(t)} \xRightarrow[\text{mit } f(x) = S(0) e^x]{\text{Itô-Formel}} dS(t) = S(t)\, dX(t) + \frac{1}{2} S(t) (dX(t))^2$$

$$dX(t) = u e^{\beta t} dW(t) - \frac{1}{2} u^2 e^{2\beta t} dt$$

$$(dX(t))^2 = u^2 e^{2\beta t} dt$$

$$\Rightarrow \quad dS(t) = S(t)\, u e^{\beta t} dW(t)$$

$$\Rightarrow \quad (S(t))_{t \geq 0} \text{ Martingal}$$

$$\Rightarrow \quad E\, S(t) = S(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad E\, e^{u I(t) - \frac{1}{2} u^2 Var\, I(t)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad ⊛$$