Beispiele [Shreve2], 4.4.3

Verallgemeinerte geometrische Brownsche Bewegung

$(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$, $(W(t))_{t\geq 0}$ wie gehabt,
$(\alpha(t))_{t\geq 0}$, $(\sigma(t))_{t\geq 0}$ adaptierte stochastische Prozesse

$$X(t) := \int_0^t \sigma(s)\, dW(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - \tfrac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds$$

(Itô-Prozess) $\qquad (\Rightarrow X(0) = 0)$

differenziell:

$$dX(t) = \sigma(t)\, dW(t) + \left(\alpha(t) - \tfrac{1}{2}\sigma^2(t)\right) dt$$

$$\Rightarrow \quad (dX(t))^2 = \sigma(t)^2\, dt$$

Betrachte Prozess ("asset price process"):

$$S(t) = S(0)\, e^{X(t)}$$

$$= \underbrace{S(0)}_{\text{pos. konstant}}\, e^{\int_0^t \sigma(s)\, dW(s) + \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))\, ds}$$

Gesucht $dS(t)$.

Wende Itô-Doeblin-Formel an auf $f(x) = S(0)e^x$.

Es ist $\frac{\partial}{\partial t} f(x) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \quad dS(t) = d f(X(t))$$

$$= f(X(t))\, dX(t) + \frac{1}{2} f(X(t))\, (dX(t))^2$$

$$= \underbrace{S(0)e^{X(t)}}_{S(t)} dX(t) + \frac{1}{2} \underbrace{S(0)e^{X(t)}}_{S(t)} (dX(t))^2$$

$$= S(t)\, dX(t) + \frac{1}{2} S(t)\, (dX(t))^2$$

$$= S(t)\sigma(t)\, dW(t) + S(t)\left(\alpha(t) - \frac{1}{2}\sigma(t)^2\right) dt$$

$$+ \frac{1}{2} S(t)\sigma(t)^2\, dt$$

$$= S(t)\,\sigma(t)\, dW(t) + S(t)\,\alpha(t)\, dt$$

$\uparrow$ "volatility" $\qquad$ $\uparrow$ "instantaneous mean rate of return"

(oder) $$S(t) = S(0) + \int_0^t S(u)\sigma(u)\, dW(u) + \int_0^t S(u)\alpha(u)\, du$$

Spezialfall : α, σ konstant :

$$dX(t) = \sigma\, dW(t) + (\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\, dt$$

$$dS(t) = \sigma S(t)\, dW(t) + S(t)\alpha\, dt$$

$$S(t) = S(0) + \sigma \int_0^t S(u)\, dW(u) + \alpha \int_0^t S(u)\, du$$

und $\quad S(t) = S(0)\, e^{\sigma W(t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$

wir haben früher gesehen $(\alpha = 0)$: $\quad e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$

ist ein Martingal
("exponentielles Martingal")

dagegen: $\quad e^{\sigma W(t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t} = \underbrace{e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t} \cdot e^{\alpha t}}_{\text{ist kein Martingal für } \alpha \neq 0}$

Vasicek interest rate model :

(Zinsrate)

"interest rate process" $(R(t))_{t\geq 0}$

$$\boxed{dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\,dt + \sigma\, dW(t) \qquad (\text{VASICEK}) \qquad (\alpha, \beta, \sigma > 0).}$$

Stochastische Differentialgleichung

Beh.: $R(t) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$

Bew.: Wende Itô-Doeblin-Formel an auf

$$X(t) = \int_0^t e^{\beta s}\, dW(s)$$

und $f(t,x) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} x$.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = -\beta e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(0 + \beta e^{-\beta t}) - \sigma \beta e^{-\beta t} x$$

$$= -\beta \left(e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} x\right) + \alpha$$

$$= \alpha - \beta f(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = \sigma e^{-\beta t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) = 0$$

$$f(t, X(t)) = e^{-\beta t} R(0) + \frac{\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} X(t)$$

$$= R(t) \checkmark$$

Nun:

$$dR(t) = d f(t, X(t))$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} f(t, X(t))\, dt + \frac{\partial}{\partial x} f(t, X(t))\, dX(t) + 0$$

$$= (\alpha - \beta f(t, X(t)))\, dt + \sigma \overbrace{e^{-\beta t} \cdot e^{\beta t}}^{1} \underbrace{e^{\beta t}\, dW(t)}_{dX(t)}$$

$$= (\alpha - \beta f(t, X(t)))\, dt + \sigma\, dW(t)$$

$\Rightarrow$ die stochastische DGL ist erfüllt, $R(t)$ ist eine Lösung.

Ferner: $R(0) = f(0, X(0))$

Eindeutigkeit der Lösung:

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dt + \sigma\, dW(t)$$
$$dR'(t) = (\alpha - \beta R'(t))\, dt + \sigma\, dW(t)$$

Differenz $d(R(t) - R'(t)) = -\beta (R(t) - R'(t))\, dt$

und $R(0) - R'(0) = 0$ $\Rightarrow R(t) - R'(t) = (R(0) - R'(0)) e^{-\beta (R(t) - R'(t))}$

$$= 0$$