

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Information

Manfred Gruber

Informatik und Mathematik, Hochschule für angewandte Wissenschaften - FH München

13. März 2008

Literatur

[1] Steven E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer, 2004.

M.Gruber, SS 2008

Stochastische Differentialgleichungen und stetige Prozesse

Bedingte Erwartung

Definition 1. ([1], Definition 2.3.1) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, \mathcal{G} eine Sub- σ -Algebra von \mathcal{F} und X eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}|X| < \infty$ (d.h. X ist integrierbar). Die durch \mathcal{G} bedingte Erwartung von X , bezeichnet mit $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$, ist eine Zufallsvariable mit den Eigenschaften

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}_1) \text{ ist messbar} \quad (1)$$

$$\int_A \mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \, d\mathbb{P} = \int_A X \, d\mathbb{P} \text{ für alle } A \in \mathcal{G}. \quad (2)$$

Ist $\mathcal{G} = \sigma(W)$ für eine Zufallsvariable W , so schreiben wir $\mathbf{E}(X|W)$ statt $\mathbf{E}(X|\sigma(W))$.

R 1. Existenz und Eindeutigkeit der bedingten Erwartung \rightarrow Vorlesung.

Eigenschaften der bedingten Erwartung

Theorem 1. ([1], Theorem 2.3.2) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und \mathcal{G} eine Sub- σ -Algebra von \mathcal{F} .

1. *Linearität:* Für $\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|Y| < \infty$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(c_1X + c_2Y|\mathcal{G}) = c_1\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + c_2\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

2. Ist $\mathbb{E}|X| < \infty, \mathbb{E}|Y| < \infty, \mathbb{E}|XY| < \infty$ und ist X \mathcal{G} -messbar, dann gilt

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

2

3. Ist \mathcal{H} eine Sub- σ -Algebra von \mathcal{G} (\mathcal{H} enthält weniger Information als \mathcal{G}) und $\mathbb{E}|X| < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{H}).$$

4. *Unabhängigkeit:* Ist X unabhängig von \mathcal{G} und $\mathbb{E}|X| < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X.$$

5. *Bedingte Jensensche Ungleichung:* Für $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $\mathbb{E}|X| < \infty$ gilt

$$\mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geq \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

3

Filtration, Adaptiertheit

Definition 2. [Filtration] ([1], Definition 2.1.1.) Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $T > 0$. Für jedes $t \in [0, T]$ existiere eine σ -algebra $\mathcal{F}(t)$ und für alle $s \leq t$ gelte $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$.

Dann heißen die σ -Algebren $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ eine Filtration.

Definition 3. [Adaptiertheit] ([1], Definition 2.1.6.) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, ausgestattet mit einer Filtration $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ von Sub- σ -Algebren von \mathcal{F} und seien $X(t), t \in [0, T]$ Zufallsvariablen.

Die Zufallsvariablen $X(t)$ heißen adaptiert, wenn jedes $X(t)$ $\mathcal{F}(t)$ -messbar ist.

4

Martingale, Submartingale, Supermartingale

Definition 4. ([1], Definition 2.3.5.) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T > 0$ und $\mathcal{F}(t), 0 \leq t \leq T$ eine Filtration aus Sub- σ -Algebren von \mathcal{F} . Ein adaptierter Prozess $M(t), 0 \leq t \leq T$ heißt

1. *Martingal*, wenn $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}(s)) = M(s)$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt. Martingale haben gleichbleibende Tendenz.
2. *Submartingal*, wenn $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}(s)) \geq M(s)$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt. Submartingale haben keine fallende Tendenz.
3. *Supermartingal*, wenn $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}(s)) \leq M(s)$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt. Supermartingale haben keine steigende Tendenz.

5