Stochastische Differentialgleichungen und kontinuierliche Prozesse (ISM2), Prüfung, mit Lösungen

M.Gruber

14.Juli 2008, 13:30–15:00, R 2.007 (5)

Sechs Aufgaben. Es können 90 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind 30 Punkte erforderlich.

Für alle Aufgaben gilt: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(W(t))_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, adaptiert an die Filtration $(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$.

1. (15 Punkte) *Itô-Integral*

   Sei

   $$\Delta(u) = 1/\lfloor u+1 \rfloor \text{ für } u \geq 0 \text{ und } I(t) = \int_0^t \Delta(u)\, dW(u).$$

   (a) Berechnen Sie $\mathbf{E}I(2)$.

   (b) Berechnen Sie $\mathbf{E}I(2)^2$.

   Hinweis $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist (Abrundungsfunktion, *floor*). Für den Graphen von Δ siehe Abbildung 1.

   Lösung

   (a) $\mathbf{E}I(2) = 0$.

   (b) $\mathbf{E}I(2)^2 = \mathbf{E}\int_0^2 \Delta(u)^2\, du = \mathbf{E}\int_0^1 1^2\, du + \mathbf{E}\int_1^2 (\frac{1}{2})^2\, du = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

2. (15 Punkte) *Martingaleigenschaft*

   (a) Sei $0 \leq s \leq t$.
   Ergänzen Sie die fehlenden Details:

   $$\mathbf{E}\left(\int_0^t W(u)\, du \middle| \mathcal{F}(s) \right) = \int_0^s \underline{\qquad\qquad}\, du + \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

   (b) Ergänzen Sie die Definition von $X(t)$ so, dass $(X(t))_{t\geq 0}$ ein Martingal ist:

   $$X(t) := \int_0^t W(u)\, du - \underline{\qquad\qquad}.$$

   (c) Gegeben sei das (exponentielle) Martingal

   $$Z(t) = 3e^{\sqrt{2}W(t)-t}.$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}Z(10)$.

   Lösung

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_0^t W(u)\,du \,\middle|\, \mathcal{F}(s)\right) &= \int_0^s W(u)\,du + \int_s^t \mathbf{E}(W(u) \mid \mathcal{F}(s))\,du \\ &= \int_0^s W(u)\,du + \int_s^t W(s)\,du \\ &= \int_0^s W(u)\,du + (t-s)W(s)\,du.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_0^t W(u)\,du - tW(t) \,\middle|\, \mathcal{F}(s)\right) &= \mathbf{E}\left(\int_0^t W(u)\,du \,\middle|\, \mathcal{F}(s)\right) - tW(s) \\ &= \int_0^s W(u)\,du + (t-s)W(s)\,du - tW(s) \\ &= \int_0^s W(u)\,du - sW(s).\end{aligned}$$

Also ist $\int_0^t W(u)\,du - tW(t)$ ein Martingal.

(c) Da $Z(t)$ ein Martingal ist, ist $\mathbf{E}Z(10) = \mathbf{E}Z(0) = 3$.

3. (15 Punkte) *Itô-Doeblin-Formel*

Sei

$$dS(t) = -\tfrac{1}{2}\,dt - \sqrt{2}\,dW(t).$$

Welche stochastischen Differentialgleichungen erfüllen die folgenden Prozesse?

(a) $X(t) = e^{-S(t)}$,

(b) $Y(t) = te^{-S(t)}$.

Lösung

(a) $X(t) = f(t, S(t))$ mit $f(t,x) = e^{-x}$, $f_t(t,x) = 0$, $f_x(t,x) = -f(t,x)$, $f_{xx}(t,x) = f(t,x)$.

$$\begin{aligned}dX(t) &= \tfrac{1}{2}X(t)\cdot 2\,dt - X(t)\,dS(t) \\ &= X(t)\,dt - (-\tfrac{1}{2}X(t)\,dt - \sqrt{2}X(t)\,dW(t)) \\ &= \tfrac{3}{2}X(t)\,dt + \sqrt{2}X(t)\,dW(t).\end{aligned}$$

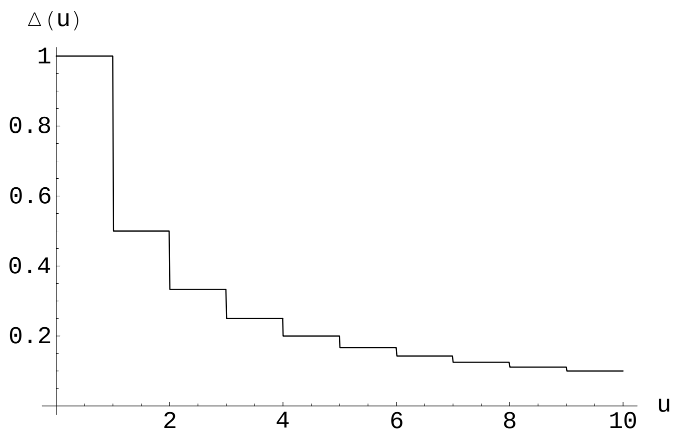

Abbildung 1: $\Delta(u)$

(b) $Y(t) = f(t, S(t))$ mit $f(t,x) = te^{-x}$, $f_t(t,x) = f(t,x)/t$, $f_x(t,x) = -f(t,x)$, $f_{xx}(t,x) = f(t,x)$.

$$\begin{aligned} dY(t) &= (\tfrac{1}{t}Y(t) + \tfrac{1}{2}Y(t)\cdot 2)\,dt - Y(t)\,dS(t) \\ &= Y(t)(\tfrac{1}{t}+1)\,dt - (-Y(t)\cdot\tfrac{1}{2}\,dt - Y(t)\sqrt{2}\,dW(t)) \\ &= Y(t)(\tfrac{1}{t}+\tfrac{3}{2})\,dt + Y(t)\sqrt{2}\,dW(t)). \end{aligned}$$

4. (15 Punkte) *Integrierender Faktor*

Lösen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = tX(t)\,dt + dW(t).$$

Hinweis Integrierender Faktor $e^{-t^2/2}$; vergleichen Sie $e^{-t^2/2}\,dX(t)$ mit $d(e^{-t^2/2}X(t))$.

Lösung

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2}\,dX(t) &= e^{-t^2/2}tX(t)\,dt + e^{-t^2/2}\,dW(t). \\ d(e^{-t^2/2}X(t)) &= X(t)(-te^{-t^2/2})\,dt + e^{-t^2/2}\,dX(t) \\ &= e^{-t^2/2}\,dW(t). \end{aligned}$$

Integration beider Seiten liefert

$$e^{-t^2/2}X(t) = X(0) + \int_0^t e^{-u^2/2}\,dW(u);$$

also ist

$$X(t) = X(0)e^{t^2/2} + \int_0^t e^{(t^2-u^2)/2}\,dW(u).$$

5. (15 Punkte) *Geometrische Brownsche Bewegung*

Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = -\tfrac{1}{2}S(t)\,dt + \sqrt{2}S(t)\,dW(t), \quad S(0) = 1.$$

(a) Wie lautet die Lösung?

(b) Welchen Erwartungswert hat die Lösung?

Lösung

(a) (Vgl. Übungsblatt 5)

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)e^{\sqrt{2}W(t)+(-1/2-(1/2)\cdot 2)t} \\ &= e^{\sqrt{2}W(t)-(3/2)t} \end{aligned}$$

(b) $e^{\sqrt{2}W(t)-t}$ ist ein exponentielles Martingal mit Erwartungswert $\mathbf{E}e^{\sqrt{2}W(t)-t} = 1$.
Damit gilt

$$\mathbf{E}S(t) = \mathbf{E}e^{\sqrt{2}W(t)-(3/2)t} = e^{-(1/2)t}\mathbf{E}e^{\sqrt{2}W(t)-t} = e^{-(1/2)t}.$$

6. (15 Punkte) *Produktregel*

Gegeben seien die stochastischen Differentialgleichungen

$$dS_1(t) = -\tfrac{1}{2}S_1(t)\,dt - \sqrt{2}S_1(t)\,dW(t),$$
$$dS_2(t) = -\tfrac{1}{2}S_2(t)\,dt + \sqrt{2}S_2(t)\,dW(t).$$

(a) Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt der Prozess $S(t) = S_1(t)S_2(t)$?

(b) Welche Lösung hat diese Gleichung, d.h. wie lautet $S(t)$?

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} d(S_1(t)S_2(t)) =& S_1(t)\,dS_2(t) + S_2(t)\,dS_1(t) - 2S_1(t)S_2(t)\,dt \\ =& -\tfrac{1}{2}S_1(t)S_2(t)\,dt + \sqrt{2}S_1(t)S_2(t)\,dW \\ & -\tfrac{1}{2}S_1(t)S_2(t)\,dt - \sqrt{2}S_1(t)S_2(t)\,dW \\ & - 2S_1(t)S_2(t)\,dt \\ =& -3S_1(t)S_2(t)\,dt, \end{aligned}$$

also

$$dS(t) = -3S(t)\,dt.$$

(b) $S(t) = S(0)e^{-3t}$.