Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (IFB4B), Prüfung mit Lösungen

M.Gruber

22. Juli 2008, 15:30–17:00, R 1.008 (18)

10 Punkte pro Aufgabe; Summe: 90 Punkte; zum Bestehen reichen 30 Punkte. Tabellen: Normalverteilung, t-Verteilung.

1. *Bayes-Formel* Sie haben drei Würfel: zwei faire und einen unfairen. Beim unfairen Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs $\frac{1}{3}$. Sie wählen zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) einen der drei Würfel und werfen ihn dreimal. Jedesmal erscheint die Sechs.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um den unfairen Würfel handelt?

   Lösung S = es erscheint dreimal die Sechs, F = ein fairer Würfel wird gewählt.

   $P(F) = \frac{2}{3}$,

   $P(\neg F) = 1 - P(F)$,

   $P(S \mid F) = (\frac{1}{6})^3$,

   $P(S \mid \neg F) = (\frac{1}{3})^3$.

   $P(\neg F \mid S) = \frac{P(S|\neg F)P(\neg F)}{P(S|\neg F)P(\neg F)+P(S|F)P(F)} = \frac{(1/3)^3\cdot(1/3)}{(1/3)^3\cdot(1/3)+(1/6)^3\cdot(2/3)} = \frac{4}{5}$.

2. *Gemeinsame Verteilung* Die Zufallsvariablen X, Y seien unabhängig und verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Gesucht ist die Dichte $g(t)$ der Zufallsvariablen $X + Y$. Wie lautet sie?

   Tipps Die gemeinsame Dichte von X und Y ist $f(x, y) = e^{-(x+y)}$. Schreiben Sie $G(t) = P(X + Y \leq t)$ als Doppelintegral und differenzieren Sie nach t. Es ist nämlich $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(X + Y \leq t)$.

   Lösung $P(X+Y \leq t) = \int_0^t \int_0^{t-u} e^{-(u+v)}\,dv\,du = \int_0^t e^{-u} \int_0^{t-u} e^{-v}\,dv\,du = \int_0^t e^{-u}(1-e^{-(t-u)})\,du = \int_0^t e^{-u}\,du - \int_0^t e^{-t}\,du = (1 - e^{-t}) - te^{-t}$. $g(t) = \frac{\partial}{\partial t}(1 - e^{-t} - te^{-t}) = te^{-t}$.

3. *Transformation einer Zufallsvariablen* Sei X verteilt mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Welche Dichte hat X^2?

   Lösung Die Transformation ist $r : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto x^2$. Sie hat die Umkehrfunktion $s(y) = \sqrt{y}$ mit der Ableitung $s'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$. $Y = X^2$ hat also die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4. *Optionspreis* Eine Aktie koste gegenwärtig 100 €. Nach einem Jahr betrage ihr Preis 80 € oder 150 €. Eine Option berechtige zum Bezug dieser Aktie in einem Jahr zum Preis von 120 €. Der Zins für eine risikofreie Geldanlage betrage 5.0% pro Jahr.

   Finden Sie einen risikoneutralen Preis für eine Option auf eine solche Aktie.

   Lösung Die Aktie mit dem gegenwärtigen Kaufpreis 100 hat in einem Jahr mit Wahrscheinlichkeit p den Wert 150 und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ den Wert 80. Sie hat den Erwartungswert $150p + 80(1 - p) = 70p + 80$. Bei Risikoneutralität ist dieser Erwartungswert gleichzusetzen mit der erwarteten Auszahlung von zu 5.0% Zins angelegten 100, also mit 105. Daraus lässt sich p berechnen: $p = (105 - 80)/70 = 5/14$.

   Die Option hat in einem Jahr mit Wahrscheinlichkeit p den Wert $150 - 120 = 30$ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ den Wert 0. Sie hat den Erwartungswert $30p = \frac{150}{14} = \frac{75}{7}$. Dieser Erwartungswert ist bei Risikoneutralität gleichzusetzen mit dem mit 5.0% aufgezinsten Kaufpreis der Option. Ihr risikoneutraler Preis ist also der mit 5.0% abgezinste Erwartungswert der Option: $\frac{75}{7 \cdot 1.05} = 10.2041$.

5. *Korrelation* Seien X, Y Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}X = 1$, $\mathbf{E}X^2 = 3$, $\mathbf{E}Y = 1$, $\mathbf{E}Y^2 = 2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$.

   Berechnen Sie die Korrelation $\rho(X+Y, X-Y)$.

   Lösung $\mathrm{Var}\, X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 3 - 1^2 = 2$, $\mathrm{Var}\, Y = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2 = 2 - (-1)^2 = 1$,

   $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X, X-Y) + \mathrm{Cov}(Y, X-Y) = \mathrm{Var}\, X - \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Y) - \mathrm{Var}\, Y = \mathrm{Var}\, X - \mathrm{Var}\, Y = 1$.

   $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\, X + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}\, Y = 2 + 2 \cdot 1 + 1 = 5$.

   $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}\, X - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}\, Y = 2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1$.

   $\rho(X+Y, X-Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(X-Y)}} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

6. *Normalverteilung* Sei X normalverteilt mit Mittelwert -1 und Varianz 4. Berechnen Sie

   (a) $P(X \geq 0)$,

   (b) $P(-1 < X < 0.5)$,

   (c) $P(|X| > 1)$.

   Lösung

   (a) $P(X \geq 0) = P(X+1 \geq 1) = P(\frac{X+1}{2} \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(\frac{X+1}{2} < \frac{1}{2}) = 1 - \Phi(\frac{1}{2}) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$.

   (b) $P(-1 < X < 0.5) = P(0 < X+1 < \frac{3}{2}) = P(\frac{X+1}{2} < \frac{3}{4}) - \frac{1}{2} = \Phi(\frac{3}{4}) - \frac{1}{2} = 0.7734 - 0.5 = 0.2734.$.

   (c) $P(|X| > 1) = 1 - P(|X| \leq 1) = 1 - P(-1 \leq X \leq 1) = 1 - P(0 \leq \frac{X+1}{2} \leq 1) = 1 - (P(\frac{X+1}{2} \leq 1) - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - P(\frac{X+1}{2} \leq 1) = \frac{3}{2} - \Phi(1) = \frac{3}{2} - 0.8413 = 0.6587$.

7. *Maximum-Likelihood-Schätzung* Die Dichte der Zufallsvariablen X sei

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Es werden Stichproben $X_1, \ldots, X_{10}$ gezogen. Die Stichprobenergebnisse seien $x_1, \ldots, x_{10}$ mit $0 < x_i < 1$ für alle i.

   (a) Wie lautet die Likelihood-Funktion $\psi(\theta)$?

   (b) Welchen Wert hat der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta} = \max_\theta \psi(\theta)$?

   Tipp (Rechenvorteil) Die Maximumsstelle von ψ ist auch Maximumsstelle von $\ln \circ \psi$.

   Lösung

   (a) $\psi(\theta) = f(x_1 \mid \theta) \cdots f(x_{10} \mid \theta) = \theta^{10}(x_1 \cdots x_{10})^{\theta-1}$.

   (b) $L(\theta) = \ln \circ \psi(\theta) = 10 \ln \theta + (\theta - 1)(\ln x_1 + \ldots + \ln x_{10})$.
   $L'(\theta) = \frac{10}{\theta} + (\ln x_1 + \ldots + \ln x_{10})$.
   $L'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = -10/(\ln x_1 + \ldots + \ln x_{10})$ (Maximumsstelle).
   $\Rightarrow \hat{\theta} = -10/(\ln x_1 + \ldots + \ln x_{10})$.

8. *Test für eine Mittelwert* Es sollen neun Stichproben aus einer normalverteilten Grundgesamtheit gezogen werden, von der weder der Mittelwert μ noch die Varianz σ^2 bekannt sind.

   Führen Sie den Test

$$H_0 : \mu \leq 20, \; H_1 : \mu > 20$$

   zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch. Für $x_1, \ldots, x_9$ gelte dabei

$$\hat{\mu} = \frac{1}{9} \sum_{1 \leq i \leq 9} x_i = 22 \text{ und } \sum_{1 \leq i \leq 9} (x_i - \hat{\mu})^2 = 72.$$

   Lösung Es handelt sich um einen Test für den Erwartungswert einer normalverteilten Größe, deren Mittelwert und Varianz unbekannt sind. Der Stichprobenumfang ist $n = 9$, das Hypothesenpaar ist $H_0 : \mu_0 \leq 20, H_1 : \mu > 20$, die Testgröße ist $T_9 = \frac{\sqrt{9}}{\hat{\sigma}}(\hat{\mu} - 20)$ mit $\hat{\mu} = 22$ und $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 72} = 3$, also ist $T_9 = 2$. Das obere 0.05%-Quantil der t-Verteilung mit 8 Freiheitsgraden ist 1.860. Der Annahmebereich ist $]-\infty, 1.860]$. Der Werte der Testgröße liegt außerhalb des Annahmebereichs, also wird H_0 verworfen.

9. *Konfidenzintervall für einen Mittelwert* Konstruieren Sie mit den Daten von Aufgabe 8 ein Konfidenzintervall für μ mit Konfidenzwahrscheinlichkeit 0.95.

   Lösung Das rechte 0.975-Quantil der t-Verteilung mit 8 Freiheitsgraden ist 2.306. Das gesuchte Konfidenzintervall ist $[22 - 2.306 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, 22 + 2.306 \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}] = [22 - 2.306, 22 + 2.306] = [19.694, 24.306]$.

Werte der Standardnormalverteilung $\Phi(z) = P(X \leq z)$ für $z \geq 0$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Obere Perzentile der t-Verteilung mit df Freiheitsgraden

df	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.9%
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.313
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.782
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.499
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.296
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.143
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.024
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090