Abgabe: *SW*9 + *SW*10

1. Schreiben Sie die Regeln auf:

   (a) Skalierung, Addition

   (b) Rechschift, Ableitung

   Lösung: Skript zur Vorlesung

2. Schreiben Sie die folgenden erzeugenden Funktionen auf:

   (a) $(1, 1, 1, \ldots) \leftrightarrow 1 + x + x^2 + \ldots = ?$

   (b) $(1, -1, 1, -1, \ldots) \leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = ?$

   (c) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \ldots = ?$

   (d) $(a^0, a^1, a^2, \ldots) \leftrightarrow 1 + ax + a^2x^2 + \ldots = ?$

   Lösung: (a) $\dfrac{1}{1-x}$ (b) $\dfrac{1}{1+x}$ (c) $\dfrac{1}{1-ax}$ (d) $\dfrac{1}{1-x^2}$

3. Schreiben Sie die folgenden erzeugenden Funktionen auf:

   (a) $(1, 2, 3, \ldots) \leftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = ?$

   (b) $(0, 1, 2, 3, \ldots) \leftrightarrow x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = ?$

   (c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots) \leftrightarrow 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \ldots = ?$

   (d) $(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots) \leftrightarrow 1^2x^2 + 2^2x^3 + \ldots = ?$

   Lösung: (a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (b) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ (c) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ (d) $\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

4. *Die erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen.*

   Die Folge der Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ist durch zweistufige Rekursion $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 2$) erklärt. Bestimmen Sie deren erzeugende Funktion h.

   Lösung:

   Unter Beachtung der Rekursion folgt:
   $h = F_0 + F_1X + F_2X^2 + F_3X^3 + \cdots$
   $X \cdot h = F_0X + F_1X^2 + F_3X^3 + \cdots$
   $X^2 \cdot h = F_0X^2 + F_1X^3 + F_2X^4 + \cdots$
   $h - X \cdot h - X^2 \cdot h = X + (F_2 - (F_1 + F_0))X^2 + (F_3 - (F_2 + F_1))X^3 + \cdots$.
   Somit ist $(1 - X - X^2) \cdot h = X$ und folglich $h = X/1-X-X^2$ die erzeugende Funktion für die Fibonacci-Folge.

5. Die Catalan-Zahlen sind oft in Problemen auf dem Gebiet der Kombinatorik anzutreffen. Sie sind wie folgt definiert:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Die ersten Zahlen sind also: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, $C_9 = 4862$, $C_{10} = 16796$, $C_{11} = 58786$, …

Beweisen Sie, dass für die erzeugende Funktion der Folge der Catalan-Zahlen

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

gilt:

$$F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Dadurch finden Sie der allgemeine Term der Catalan-Folge.

Lösung: Seiten 189-205.

1 Punkt

2 Punkte

3 Punkte

SW = Semester Woche

Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg Verlag, 2006.