Hausaufgabe Diskrete Mathematik (IFB1A, IFB1B, IFS1) Blatt 6

SS 2008

Abgabe: *SW*9 + *SW*10

1. Schreiben Sie die Regeln auf:

   (a) Skalierung, Addition

   (b) Rechschift, Ableitung

2. Schreiben Sie die folgenden erzeugenden Funktionen auf:

   (a) $(1, 1, 1, \ldots) \leftrightarrow 1 + x + x^2 + \ldots = ?$

   (b) $(1, -1, 1, -1, \ldots) \leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = ?$

   (c) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \ldots = ?$

   (d) $(a^0, a^1, a^2, \ldots) \leftrightarrow 1 + ax + a^2x^2 + \ldots = ?$

3. Schreiben Sie die folgenden erzeugenden Funktionen auf:

   (a) $(1, 2, 3, \ldots) \leftrightarrow 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = ?$

   (b) $(0, 1, 2, 3, \ldots) \leftrightarrow x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots = ?$

   (c) $(1^2, 2^2, 3^2, \ldots) \leftrightarrow 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \ldots = ?$

   (d) $(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots) \leftrightarrow 1^2x^2 + 2^2x^3 + \ldots = ?$

4. *Die erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen.*

   Die Folge der Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ist durch zweistufige Rekursion $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$ erklärt. Bestimmen Sie deren erzeugende Funktion h.

5. Die Catalan-Zahlen sind oft in Problemen auf dem Gebiet der Kombinatorik anzutreffen. Sie sind wie folgt definiert:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

   Die ersten Zahlen sind also: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, $C_9 = 4862$, $C_{10} = 16796$, $C_{11} = 58786$, …

   Beweisen Sie, dass für die erzeugende Funktion der Folge der Catalan-Zahlen

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

   gilt:

$$F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}.$$

   Dadurch finden Sie der allgemeine Term der Catalan-Folge.

L 1 Punkt

M 2 Punkte

S 3 Punkte

SW = Semester Woche

Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg Verlag, 2006.