Abgabe: *SW*8 + *SW*9

1. Schreiben Sie auf.
   (a) die Peanoschen Axiome
   (b) die Schritte eines Beweis durch vollständigen Induktion

2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

3. Beweisen Sie, dass die Aussage „Ist p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl, so ist $n^p - n$ durch p teilbar“ wahr ist (kleiner Fermatscher Satz).

4. *Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (Schwarzsche Ungleichung).* Wir stellen hier eine nützliche Ungleichung vor, die in vielen Bereichen der Mathematik verwendet wird: Lineare Algebra (Vektoren), Analysis (unendliche Reihen), Wahrscheinlichkeitstheorie, Integration von Produkten. Wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ reelle Zahlen sind, dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 .$$

Beweisen Sie es.

5. Finden Sie die allgemeinen Formeln für die beiden Ausdrücke und beweisen Sie sie:

   a) $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$ für alle $n \geq 1$.

   b) $P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ für alle $n \geq 2$.

6. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie, dass für ein reelles x mit $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + nx \leq (1+x)^n$.

7. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die folgenden Aussagen gelten:

   a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ist durch 133 teilbar;

   b) $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar;

   c) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ ist durch 17 teilbar;

   d) $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ ist durch 23 teilbar.

8. *Die Ackermannfunktion (Verschachtelte Rekursion, "*compound recursion*").* Die Ackermannfunktion ist für $m, n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

$$Ack(n,m) = \begin{cases} m+1, \text{ wenn } & n = 0 \\ Ack(n\text{-}1,\, 1), \text{ wenn } & m = 0 \\ Ack(n\text{-}1,\, Ack(n,\, m\text{-}1)), \text{ wenn } & m \neq 0 \text{ und } n \neq 0 \end{cases}$$

Die Ackermannfunktion wächst sehr schnell: *Ack*(3, 4)=125, aber *Ack*(4, 2) besitzt bereits 19729 Dezimalstellen! Schreiben Sie ein Programm in Java, das die Ackermannfunktion für Paare (n, m) berechnet. Benutzen Sie dafür die Klasse *java.math.BigInteger*. Beispiel:

ack.in	**ack.out**
`0 2`	`Ack(0, 2)= 3`
`2 0`	`Ack(2, 0)= 3`
`3 4`	`Ack(3, 4)= 125`
`3 5`	`Ack(3, 5)= 253`
`3 2`	`Ack(3, 2)= 29`

9. *Collatz-Funktion (nicht-monotone Rekursion).* Die Collatz-Funktion ist definiert wie folgt:

$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } n = 1 \\ \dfrac{n}{2}, \text{ wenn } n \text{ gerade} \\ 3 \cdot n + 1, \text{ wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und hat die Eigenschaft, dass sie bei Iteration gegen 1 „konvergiert". Zum Beispiel wird für n=12 die generierte Sequenz: 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 und sie hat die Länge 9, weil man in 9 Schritten die Eins erreicht.

Schreiben Sie eine rekursive Funktion, die diese Sequenz generiert. Am Ende soll auch die Anzahl der Schritte ausgegeben werden. Beispiel:

numbers.in	**collatzSeq.out**
1 12 67 1003 234	1 [1] STOP<0> 12 6 3 10 5 16 8 4 2 1 [1] STOP<9> 67 202 101 304 152 76 38 19 58 29 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1 [1] STOP<27> 1003 3010 1505 4516 2258 1129 3388 1694 847 2542 1271 3814 1907 5722 2861 8584 4292 2146 1073 3220 1610 805 2416 1208 604 302 151 454 227 682 341 1024 512 256 128 64 32 16 8 4 2 1 [1] STOP<41> 234 117 352 176 88 44 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1 [1] STOP<21>

1 Punkt

2 Punkte

3 Punkte

SW = Semester Woche

Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg Verlag, 2006.