Abgabe: *SW7* + *SW8*

1. Schreiben Sie auf:
   (a) Allgemeinform des Prinzips der Inklusion und Exklusion
   (b) Schubfachprinzip
   (c) Permutationen (ohne und mit Wiederholung)
   (d) Variationen (ohne und mit Wiederholung)
   (e) Kombinationen (ohne und mit Wiederholung)
   (f) Binomischer Lehrsatz

   Lösung: Seiten 153-163, Skript zur Vorlesung

2. Wie viele Personen braucht man, um behaupten zu können, dass q ($q \geq 2$) Personen am selben Tag Geburtstag haben?

   Lösung: $365*(q-1)+1$

3. Zu einer Veranstaltung werden n Teilnehmer erwartet. Man weiß, dass sich manche von ihnen schon kennen (wenn A die Person B kennt, dann kennt B auch A) und jeder kennt mindestens einer anderen. Zeigen Sie, dass es zwei Personen gibt, die gleich viele Teilnehmer kennen.

   Lösung: Ein Teilnehmer kann 1, 2, .., n-1 andere Teilnehmen kennen. Weil es n sind und n-1 Möglichkeiten, folgt, dass es 2 gibt, die dieselbe Zahl..

4. Auf wie viele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI so anordnen, dass nicht alle I, S und P hintereinander stehen?

   Lösung: Verwenden Sie das Prinzip von Inklusion und Exklusion: Es sei die Menge A_1 die Menge der Wörter, die IIII beinhalten, A_2 die Menge der Wörter, die PP beinhalten, A_3 die Menge der Wörter, die SSSS beinhalten und A die Menge aller Wörter mit den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI…

5. (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, Rudermannschaften mit acht Schülern und einem Lehrer zusammenzustellen (Achter mit Steuermann), wenn 20 Schüler und drei Lehrer zur Auswahl stehen?

(b) Eine Klasse besteht aus n Schülern. Jeder hat jedem ein Foto gegeben. Wie viele Fotos sind im Umlauf?

Lösung: (a) $\binom{20}{8} \cdot \binom{3}{1} = \ldots$ **(b)** $2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$

6. Eine natürliche Zahl n mit $1 \leq n < 10.000$ ist gegeben, und es ist bekannt, dass weder 2 noch 5 Teiler von n sind. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass es Vielfache von n gibt, die nur aus der Ziffer 1 bestehen. Wie viele Ziffern hat die kleinste dieser Vielfachen? *Eingabe:* Die Eingabedatei *zahl.in* beinhaltet maximal 500 Eingabefälle, einen pro Zeile. Jeder Fall repräsentiert ein n. *Ausgabe:* Geben Sie in die Datei *vielfache.out* für jeden Eingabefall eine Zeile mit der Ziffernanzahl der kleinsten gesuchten Vielfachen aus, wie im Beispiel:

zahl.in	**vielfache.out**
3	3 --> 3
7	7 --> 6
9901	9901 --> 12
97	97 --> 96
5673	5673 --> 60
791	791 --> 336
5557	5557 --> 926
543	543 --> 180
9999	9999 --> 36

Lösung: Seiten 186-187

7. Eine Studiengruppe muss vier Prüfungen schreiben, die an acht Prüfungstagen angeboten werden. Die Gruppe kann aussuchen, welche Prüfung sie an welchem Tag absolvieren will. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn eine der Prüfungen auf den letzten Tag fixiert wird?

Lösung: a) V_8^4, b) $4 \cdot V_7^3$

8.

Permutationen in lexikographischer Reihenfolge

Generieren Sie für eine natürliche Zahl n alle Permutationen der Menge

{1, 2, …, *n*} in lexikographischer Reihenfolge.

Eingabe: In der Datei *genperm.in* befindet sich eine natürliche Zahl *n* ($1 \le n \le 10$). *Ausgabe:* Schreiben Sie in die Datei *genperm.out* alle Permutationen der Menge {1, 2, …, *n*} in lexikographischer Reihenfolge, und zwar eine Permutation pro Zeile.

genperm.in	genperm.out
3	1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 1 2 3 2 1

Lösung: Seite 173.

9. Eine Funktion $f: A \to B$ heißt *surjektiv*, wenn es für alle $y \in B$ ein $x \in A$ gibt, so dass $f(x)=y$. Es seien zwei Mengen A und B mit $|A| = k$ und $|B| = n$, $k \ge n$, gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Inklusion und Exklusion, dass für die Anzahl $S_j(k, n)$ der surjektiven Funktionen $f: A \to B$ gilt:

$$S_j(k,n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = n^k - \binom{n}{1} \cdot (n-1)^k + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot k$$

Bemerkung. Dieses Aufgabe kann man auf Probleme dieses Typs übertragen: Auf wie viele Arten kann man *n* Objekte auf *k* Personen verteilen ($k \ge n$), so dass jede Person mindestens ein Objekt bekommt?

Lösung: Prinzip der Inklusion und Exklusion.

A_i = die Menge aller Funktionen, die das Element *i* nicht beinhalten

Wir brauchen: $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$

$|A_i| = (n-1)^k$ für alle $i = 1..n$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)^k \ldots$

L 1 Punkt

M 2 Punkte

S 3 Punkte

SW = Semester Woche

Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg Verlag, 2006.