

**Abgabe: SW5 + SW6**

1. Definieren Sie die Begriffe:

- (a) Teilbarkeit
- (b) Primzahl
- (c) Teilbarkeitsfunktion
- (d) Größte gemeinsame Teiler, kleinste gemeinsame Vielfache

Geben Sie ein paar Beispiele für jeden.

**Lösung:** Seiten 81-85

2. Schreiben Sie die Schritte des euklidischen Algorithmus für die Berechnung des größten gemeinsamen Teiler von:

- a) 294 und 77
- b) 2521 und 338

Schreiben Sie die allgemeine Form des euklidischen Algorithmus.

**Lösung:**

<b>a = 294, b = 77</b>	<b>a = 2521, b = 338</b>
$294 = 3 \cdot 77 + 63$	$2521 = 7 \cdot 338 + 155$
$77 = 1 \cdot 63 + 14$	$338 = 2 \cdot 155 + 28$
$63 = 4 \cdot 14 + 7$	$155 = 5 \cdot 28 + 15$
$14 = 2 \cdot 7 + 0$	$28 = 1 \cdot 15 + 13$
	$15 = 1 \cdot 13 + 2$
	$13 = 6 \cdot 2 + 1$
	$2 = 2 \cdot 1 + 0$



3. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist 65 und ihr größter gemeinsamer Teiler ist 13. Finden Sie alle Lösungen.

**Lösung:**

1·13, 4·13

2·13, 3·13

3·13, 2·13

4·13, 1·13



4. Die Alter eines Vaters, seines Sohnes und seines Enkels sind Primzahlen, und nach fünf Jahren werden es Quadratzahlen sein. Wie alt ist jeden von ihnen jetzt?

SS 2008

**Lösung:**

11 31 59

5. Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

a)  $91 \mid 3^{91} - 3$     b)  $15 \mid 4^{15} - 4$

c)  $42 \mid n^7 - n$     d)  $37 \mid 1000^n - 1$

**Lösung:**6. **Satz.** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Wie lautet den euklidischen Beweis dafür?

**Lösung:** Seite 827. a) Lösen Sie in  $\mathbb{Z}(5, \oplus, \otimes)$  die Gleichung:  $2 \otimes x \oplus 3 = 2$ .b) Zeigen Sie, dass die Gleichung  $a \otimes x \oplus b = 0$ , mit  $a \neq 0$ , hat genau eine Lösung in  $\mathbb{Z}(5, \oplus, \otimes)$ .**Lösung:** a)  $x = 2$ 

b)  $a \otimes x_1 \oplus b = a \otimes x_2 \oplus b \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = x_2$ .

8. Finden Sie die Lösungen in  $\mathbb{Z}(6, \oplus, \otimes)$  für die Gleichungen:

a)  $5 \otimes x \oplus 2 = 4$

b)  $3 \otimes x \oplus 4 = 4$

c)  $2 \otimes x \oplus 3 = 2$

**Lösung:** a)  $x = 4$ , b)  $x_1 = 0, x_2 = 2$  und  $x_3 = 4$ , c) keine Lösung9. a) Bestimmen Sie eine natürliche Zahl  $n$  mit den Bedingungen:  $n-2$ durch 6 teilbar und  $n+2$  durch 241 teilbar.b) Die Zahlen  $x, x+2, x+6, x+14$  und  $x+18$  sind alle prim. Bestimmen Sie  $x$ .**Lösung:**

a)  $n-2 = 6p, n+2=241q \Rightarrow$  kleinste  $q = 4$  und  $k = 160 \Rightarrow n = 962$ ;

b)  $x$  kann nicht 2 sein. Man zeigt weiter, dass  $x$  keine der Formen  $5k+1, 5k+2, 5k+3$  oder  $5k+4$  haben kann. Es folgt, dass  $x$  hat die Form  $5k$ . Die einzige Primzahl in dieser Form ist 5.

SS 2008



1 Punkt



2 Punkte



3 Punkte

SW = Semester Woche

### Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg Verlag, 2006.