Abgabe: *SW*3 + *SW*4

1. Definieren Sie die Begriffe:
   (a) Menge, leere Menge, Gleichheit von Mengen;
   (b) Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und symmetrische Differenz zweier Mengen;
   (c) Potenzmenge;
   (d) Binäre Relation, Funktion, partielle Funktion;
   (e) injektive, surjektive, bijektive Funktion.

   Lösung:

   Seiten 59-65.

2. Wann ist eine Relation über A ($\subseteq A \times A$):
   (a) reflexiv
   (b) irreflexiv
   (c) symmetrisch
   (d) antisymmetrisch
   (e) transitiv
   (f) total
   (g) Äquivalenzrelation

   Lösung:

   Seite 64.

3. Zählen Sie alle Teilmengen der Menge {1, 2, 3, *a*} auf.

   Lösung:

   $\emptyset$

   {1}, {2}, {3}, {a}

   {1, 2}, {1, 3}, {1, a}, {2, 3}, {2, a}, {3, a}

   {1, 2, 3}, {1, 2, a}, {1, 3, a}, {2, 3, a}

   {1, 2, 3, a}

Anzahl der Teilmengen = $2^4 = 16$

4. Bestimmen Sie die Mengen A und B, für die bekannt ist:

(a) $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$

(b) $A \cap B = \{c, 1\}$

(c) $A \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset$

(d) $\{a, b\} \cap B = \emptyset$

Lösung:

A = {a, b, c, 1}

B = {c, 1, 2, 3, 4}

5. Bestimmen Sie die Mengen A, B, und C, die alle diese Bedingungen erfüllen:

(a) $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 10\}$

(b) $A \cap B = \emptyset$

(c) $C \subset B$

(d) $A \setminus C = \{1, 3, 7\}$

(e) $B \setminus C = \{5, 9\}$

Lösung:

A = {1, 3, 7}

B = {2, 4, 5, 6, 8, 9}

C = {2, 4, 6, 8}

6. Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{N} \text{ und } \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}\} \text{ und } B = \{x \mid x\in\mathbb{N} \text{ und } \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\}.$$

Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$.

Lösung:

$$\frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3+\frac{8}{x-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ A = {-6, -4, -3, 0, 1, 3, 4, 6, 10}

$\frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5+\frac{12}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ x-1 $\in$ {±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12} $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ B = {-11, -5, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 7, 13}

$A \cup B$ = {-11, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13}

$A \cap B$ = {-3, 0, 3, 4}

$A \setminus B$ = {-6, -4, 6, 10}

7. Es sei A die Menge der Menschen in Deutschland. Wir definieren die Funktion f: $A \to \mathbb{R}$ nach dem Gesetz: „$f(x)$ = die Größe der Person x in Zentimeter“. Ist f injektiv? Oder surjektiv?

Lösung:

Nicht injektiv: es gibt zwei verschiedene Menschen M_1 und M_2 mit dieselber Größe: $f(M_1) = f(M_2)$.

Nicht surjektiv: es gibt Werte y in $\mathbb{R}$ (z. B. die negativen Zahlen), so dass für sie keine x in A mit $f(x) = y$ geben.

8. Die Funktion f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, \text{wenn } n \text{ gerade} \\ n-1, \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Lösung:

Es sei x_1 und x_2 in $\mathbb{N}$, so dass $f(x_1) = f(x_2) = y$. Wenn y gerade ist, folgt: $x_1 = x_2 = y+1$. Wenn y ungerade ist, folgt: $x_1 = x_2 = y-1$. Also ist f injektiv.

Es sei $y \in \mathbb{N}$. Wenn y gerade ist, dann $f(y+1) = y$. Wenn y ungerade ist, dann $f(y-1) = y$. Es folgt, dass es $x \in \mathbb{N}$ in gibt, so dass $f(x) = y$, also ist f surjektiv.

9. Gegeben sind die Mengen $A = \left\{ \frac{100}{x} \middle| \frac{11}{13} < \frac{100}{x} < \frac{17}{19}; x \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$ und B. Geben Sie die Elemente von A und B an, wenn für sie gilt:

(a) $B \subset A$ ist nicht wahr;

(b) $A \setminus B = \left\{\frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \frac{100}{114}\right\}$

(c) $B \cup \left\{\frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{119}\right\} = \left\{\frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{115}, \ldots, \frac{100}{119}\right\}$

Lösung:

$$\mathbf{A} = \left\{\frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \ldots, \frac{100}{118}\right\}$$

$$\mathrm{B} = \left\{\frac{100}{115}, \frac{100}{116}, \ldots, \frac{100}{119}\right\}$$

L 1 Punkt

M 2 Punkte

S 3 Punkte

SW = Semester Woche

Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg Verlag, 2006.