Diskrete Mathematik (IFB2B), Prüfung mit Lösungen

M.Gruber

15.Juli 2008, 08:30–10:00, R 1.008, R 2.007 (33)

1. (10 Punkte) *Größter gemeinsamer Teiler*

   (a) Wie lautet der größte gemeinsame Teiler d von $x = 6388$ und $y = 5168$?

   (b) Stellen Sie d in der Form $d = ax + by$ mit geeigneten $a, b \in \mathbf{Z}$ dar. Wie lauten a und b?

   Hinweis Falls Sie es brauchen können: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} -72 & 305 \\ 305 & -1292 \end{bmatrix}$.

   Lösung

$$\begin{bmatrix} 5168 \\ 1220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6388 \\ 5168 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1220 \\ 288 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5168 \\ 1220 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 288 \\ 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1220 \\ 288 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 68 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 288 \\ 68 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 68 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6388 \\ 5168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72 & 305 \\ 305 & -1292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6388 \\ 5168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 & -377 \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6388 \\ 5168 \end{bmatrix}$$

   (a) $d = 4$,

   (b) $a = 305, b = -377$.

2. (10 Punkte) *Chinesischer Restsatz*

   Die Zahl $n \in \{1, \dots, 179\}$ hat folgende Eigenschaften:

$$n \bmod 9 = 7, \quad n \bmod 4 = 3, \quad n \bmod 5 = 1.$$

   Wie lautet n?

   Lösung

$$\begin{aligned} x \bmod 9 &= 1, & x \bmod 20 &= 0 & \Rightarrow x &= 100 \\ y \bmod 4 &= 1, & y \bmod 45 &= 0 & \Rightarrow y &= 45 \\ z \bmod 5 &= 1, & z \bmod 36 &= 0 & \Rightarrow z &= 36. \end{aligned}$$

$$n = (7x + 3y + z) \bmod 180 = 871 \bmod 180 = 151.$$

3. (10 Punkte) Finden Sie eine geschlossene Form für die Rekursion

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(n) = -4f(n-1) + 5f(n-2). \tag{1}$$

Lösung Die charakteristische Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$ hat die Lösungen. -5 und 1.
$c_1(-5)^n$ und $c_2 1^n = c_2$ sind damit homogene Lösungen.
Die Randbedingungen sind mit $c_1 = \frac{1}{6}$ und $c_2 = \frac{5}{6}$ erfüllt.
Also ist $f(n) = \frac{1}{6} \cdot (-5)^n + \frac{5}{6}$.

4. (10 Punkte) Wie lautet die Erzeugendenfunktion $G_f(x) = \sum_n f(n)x^n$ zu f, wenn

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(n) = -4f(n-1) + 5f(n-2) \tag{2}$$

gilt (das gleiche f wie in (1))?

Lösung
Es ist

$$f(n) = -4f(n-1) + 5f(n-2) + [n=0] + 4[n=1]$$

mit den Konventionen "Iversonklammer" und $f(k) = 0$ für $k < 0$.

Es folgt

$$\begin{aligned} G_f(x) &= -4\sum_n f(n-1)x^n + 5\sum_n f(n-2)x^n + 4\sum_n [n=1]x^n + \sum_n [n=0]x^n \\ &= -4xG_f(x) + 5x^2G_f(x) + 4x + 1, \end{aligned}$$

somit ist

$$G_f(x) = \frac{4x+1}{1+4x-5x^2}.$$

5. (10 Punkte) *Mine-Sweeper, Größe* 4×5.

Zehn Minen sind versteckt. Nach zwei Spielzügen sieht das Tableau so aus:

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 2 & 2 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Feld x

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & x & \square & \square & \square \\ \square & 2 & 2 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

vermint ist?

Lösung Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \lozenge & \lozenge & \lozenge & \lozenge & \lozenge \\ \bullet & \circ & \circ & * & \lozenge \\ \bullet & 2 & 2 & * & \lozenge \\ \bullet & \circ & \circ & * & \lozenge \end{array}.$$

- *Fall 1* $\begin{array}{c|cccc} & \bullet & \circ & * & \lozenge \\ \hline \text{Anz.} & 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}$ Es gibt $\binom{3}{2}\binom{4}{0}\binom{3}{2}\binom{8}{6} = 252$ solche Konstellationen.
  In keinem dieser Fälle ist x vermint.
- *Fall 2* $\begin{array}{c|cccc} & \bullet & \circ & * & \lozenge \\ \hline \text{Anz.} & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}$ Es gibt $\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{8}{7} = 288$ solche Konstellationen.
  In $\frac{1}{4}$ dieser Fälle ist x vermint.
- *Fall 3* $\begin{array}{c|cccc} & \bullet & \circ & * & \lozenge \\ \hline \text{Anz.} & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array}$ Es gibt $\binom{3}{0}\binom{4}{2}\binom{3}{0}\binom{8}{8} = 6$ solche Konstellationen.
  In der Hälfte dieser Fälle ist x vermint.

$$P(x \text{ vermint }) = \frac{0 \cdot 252 + \frac{1}{4} \cdot 288 + \frac{1}{2} \cdot 6}{252 + 288 + 6} = \frac{25}{182}.$$

6. (10 Punkte) Sie haben zwei faire und einen unfairen Würfel. Beim unfairen Würfel wird jede Augenzahl zwischen 1 und 5 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$ gewürfelt, die Augenzahl 6 dagegen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{7}$. Sie wählen zufällig (mit gleicher Wahrscheinlichkeit) einen der drei Würfel und würfeln zweimal eine 6.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um den unfairen Würfel handelt?

   Lösung $F =$ *fairer Würfel*, $\neg F =$ *unfairer Würfel*, $S =$ *zweimal die Sechs*.
   $P(F) = \frac{2}{3}$, $P(\neg F) = \frac{1}{3}$, $P(S \mid F) = (\frac{1}{6})^2$, $P(S \mid \neg F) = \frac{2}{7}^2$.

$$\begin{aligned} P(\neg F \mid S) &= \frac{P(S \mid \neg F) P(\neg F)}{P(S \mid F) P(F) + P(S \mid \neg F) P(\neg F)} \\ &= \frac{(\frac{2}{7})^2 \frac{1}{3}}{(\frac{2}{7})^2 \frac{1}{3} + (\frac{1}{6})^2 \frac{2}{3}} \\ &= \frac{72}{121} \approx 0.6 \end{aligned}$$

7. (10 Punkte)

   (a) Wieviele Personen braucht man mindestens, um sagen zu können, dass vier von ihnen dasselbe Geschlecht haben?

   (b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Elemente der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$ so anzuordnen, dass sich jede ungerade Zahl auf einer geraden Stelle befindet?

   (c) Wieviele Wörter kann man mit den Buchstaben des Wortes `MAMMAMIA` bilden?

   (d) Es werden Wörter der Länge n mit den Buchstaben `0`,`1`,`U`,`Z`,`X` gebildet (z.B.: $n = 6$, `01ZZUX`, `XX01UZ`,...).
   Wieviele Wörter der Länge n gibt es?

   Lösung

   (a) 7 (Taubenschlagprinzip).

(b) $(2n)! \cdot (2n)! = (2n)!^2$.

(c) $\binom{8}{4,3,1} = \dfrac{8!}{4!3!1!} = 280$ (Permutation mit Wiederholung).

(d) 5^n (Variationen mit Wiederholung mit n Elementen aus einer Menge mit vier Elementen).

8. (10 Punkte) Geben Sie Beispiele (für jede Methode mindestens eines, insgesamt mindestens sechs), die die folgende Methode verwenden:

(a) lineares Backtracking mit fester Länge,

(b) Backtacking mit beliebig langer Lösung,

(c) Backtracking in der Ebene.

Lösung

(a) N-Damen-Problem, N-Türme-Problem (Generierung aller Permutationen), M-Türme (Generierung der Variationen ohne Wiederholung), M aufsteigende Türme (Generierung der Kombinationen ohne Wiederholung).

(b) Generierung aller Partitionen einer natürlichen Zahl.

(c) Alle Züge des Springers auf einem Schachbrett, Labyrinthproblem, Fotoproblem, Ballproblem.

9. (10 Punkte) Betrachten Sie die Menge der Permutationen von n Elementen mit lexikographischer Ordnung.

Die lexikographische Ordnung "kleiner" stellt eine totale Ordnung auf dieser Menge dar:

- Startelement (ohne Vorgänger) ist $(1, 2, \ldots, n)$,
- Endelement (ohne Nachfolger) ist $(n, n-1, \ldots, 1)$.
- Beispiel für Nachfolger: $(6, 4, 1, 2, 3, 5)$ ist Nachfolger von $(6, 3, 5, 4, 2, 1)$.

Finden Sie die Nachfolger der Permutationen

(a) $(2, 3, 1)$,

(b) $(6, 4, 5, 3, 2, 1)$,

(c) $(7, 2, 6, 1, 4, 9, 8, 5, 3)$.

Lösung

(a) $(3, 1, 2)$,

(b) $(6, 5, 1, 2, 3, 4)$,

(c) $(7, 2, 6, 1, 5, 3, 4, 8, 9)$.