Diskrete Mathematik (IFB2B), Vorprüfung mit Lösungen

M.Gruber

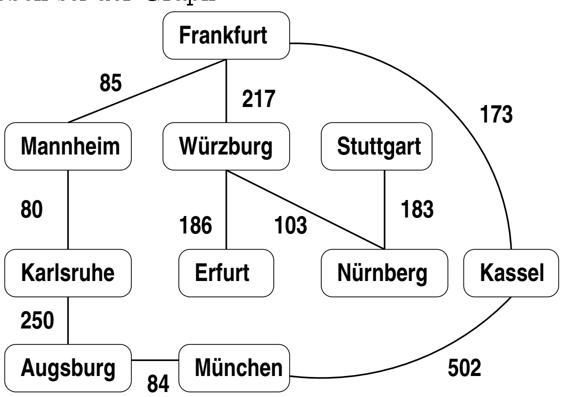
16.Juli 2007, 15:45–17:15, R 1.006 (25)

1. (10 Punkte) *Turing's Code, Version 2.0 (mit sehr kleinen Zahlen)* Der (öffentlich bekannte) Modulus sei $p = 13$, der (geheime) Schlüssel $k = 6$. Ihre Freundin schickt Ihnen die verschlüsselte Botschaft $m^* = m \cdot 6 \text{ rem } 13 = 8$.

   Wie lautet die Klartextbotschaft m?

   Lösung Bestimmung des modularen Inversen 6^{-1}: $13s + 6t = 1$ wird mit $s = -5, t = 11$ erfüllt, also ist $6^{-1} \equiv 11 \bmod 13$. Die Klartextbotschaft ist $m \equiv m^* k^{-1} \bmod p$, also $m = 8 \cdot 11 \text{ rem } 13 = 10$.

2. (10 Punkte) Gegeben sei der Graph



   Beschreiben Sie kurz, wie der Dijkstra-Algorithmus den kürzesten Weg von Erfurt nach München findet.

   Hinweis Eine Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, besteht darin, in einer Tabelle die Distanzen anzugeben, die der Algorithmus schrittweise zu den einzelnen Orten berechnet, bis er schließlich die kürzeste Distanz von Erfurt nach München findet. Dise Tabelle beginnt so:

Schritt	F	MA	WÜ	S	KA	EF	N	KS	A	M
0	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
1	∞	∞	186	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	186	∞	∞	0	289	∞	∞	∞
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

   Wie geht sie weiter?

   Lösung

Schritt	F	MA	WÜ	S	KA	EF	N	KS	A	M
0	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
1	∞	∞	186	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	186	∞	∞	0	289	∞	∞	∞
3	403	∞	186	∞	∞	0	289	∞	∞	∞
4	403	∞	186	472	∞	0	289	∞	∞	∞
5	403	488	186	472	∞	0	289	∞	∞	∞
6	403	488	186	472	568	0	289	∞	∞	∞
7	403	488	186	472	568	0	289	576	∞	∞
8	403	488	186	472	568	0	289	576	818	∞
9	403	488	186	472	568	0	289	576	818	902

3. (10 Punkte) Finden Sie für die Rekursion

$$\begin{aligned} h(1) &= \alpha \\ h(n+1) &= 2h(n) + 2^n\beta \end{aligned}$$

eine geschlossene Form $h(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta$.

Lösung *1.Ansatz* $h(n) = 2^n \ \forall_n$. Es folgt $\alpha = 2, \beta = 0, A(n) = 2^{n-1}$.
2.Ansatz $h(n) = n2^n \ \forall_n$. Es folgt $\alpha = 2, \beta = 2, B(n) = (n-1)2^{n-1}$.
Geschlossene Form: $h(n) = 2^n\alpha + (n-1)2^{n-1}\beta$.

4. (10 Punkte) Sie haben beliebig viele Briefmarken zu 5, 10 und 20 Cent und sollen einen Brief mit 55 Cent frankieren.
Wieviele Möglichkeiten haben Sie?

Lösung

$$\begin{array}{lll} A(x) = \frac{1}{1-x^5} & A(x) = x^5A(x) + 1 & A_n = A_{n-5} + [n=0] = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1 \\ B(x) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x^{10}} & B(x) = x^{10}B(x) + A(x) & B_n = B_{n-10} + A_n \\ C(x) = B(x) \cdot \frac{1}{1-x^{20}} & C(x) = x^{20}C(x) + B(x) & C_n = C_{n-20} + B_n \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} C_{55} = C_{35} + B_{55} & C_{35} = C_{15} + B_{35} & C_{15} = B_{15} \\ B_{55} = B_{45} + A_{55} & B_{45} = B_{35} + A_{45} & \ldots B_5 = A_5 \end{array}$$

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
A_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n		2		6		12		20		30		42
C_n				6				26				$\boxed{68}$

5. (10 Punkte) Finden Sie eine geschlossene Form für die Rekursion

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 0 \\ f(n) &= 4f(n-1) - 3f(n-2) \end{aligned}$$

Lösung Die charakteristische Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ hat die Lösungen. 3 und 1. $c_1 3^n$ und $c_2 1^n = c_2$ sind damit homogene Lösungen. Die Randbedingungen sind mit $c_1 = -\frac{1}{2}$ und $c_2 = \frac{3}{2}$ erfüllt. Also ist $f(n) = -\frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{3}{2}$.

6. (10 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gut vorbereitete Studentin mindestens die Note 2 bekommt, beträgt 90%. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht gut vorbereitete Studentin mindestens die Note 2 bekommt, beträgt 5%. 20% der Studentinnen sind gut vorbereitet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Studentin, die mindestens die Note 2 bekommt, gut vorbereitet war?

Lösung G = *gut vorbereitet*, M = *mindestens Note 2*. $P(G) = \frac{1}{5}$, $P(\neg G) = \frac{4}{5}$, $P(M \mid G) = \frac{9}{10}$, $P(M \mid \neg G) = \frac{1}{20}$.

$$P(G \mid M) = \frac{P(G \wedge M)}{P(M)} = \frac{P(M \mid G)P(G)}{P(M \mid G)P(G) + P(M \mid \neg G)P(\neg G)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{9}{50} + \frac{2}{50}} = \frac{9}{11}.$$

7. (10 Punkte) *Mine-Sweeper, Größe* 4×5. Elf Minen sind versteckt. Nach zwei Spielzügen sieht das Tableau so aus:

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 1 & 3 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) das Feld a

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \boxed{\text{a}} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 1 & 3 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

(b) das Feld b

$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \boxed{\text{b}} & \square \\ \square & 1 & 3 & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

vermint ist?

Lösung Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \Diamond & \Diamond & \Diamond & \Diamond & \Diamond \\ \bullet & \circ & \circ & * & \Diamond \\ \bullet & 1 & 3 & * & \Diamond \\ \bullet & \circ & \circ & * & \Diamond \end{array}.$$

- *Fall 1* $\begin{array}{c|cccc} & \bullet & \circ & * & \Diamond \\ \hline \text{Anz.} & 1 & 0 & 3 & 7 \end{array}$ Es gibt $\binom{3}{1}\binom{4}{0}\binom{3}{3}\binom{8}{7} = 24$ solche Konstellationen.
  In $\frac{7}{8}$ dieser Fälle ist a vermint. In allen diesen Fällen ist b vermint.
- *Fall 2* $\begin{array}{c|cccc} & \bullet & \circ & * & \Diamond \\ \hline \text{Anz.} & 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}$ Es gibt $\binom{3}{0}\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{8}{8} = 12$ solche Konstellationen.
  In allen diesen Fällen ist a vermint. In $\frac{2}{3}$ dieser Fälle ist b vermint.

$$P(a \text{ vermint }) = \frac{\frac{7}{8} \cdot 24 + 12}{36} = \frac{11}{12}, \quad P(b \text{ vermint }) = \frac{24 + \frac{2}{3} \cdot 12}{36} = \frac{8}{9}.$$

8. (10 Punkte) Ein Hausaufgabenblatt hat sechs Aufgaben. Jede Aufgabe beschäftigt Sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ eine Stunde, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zwei Stunden und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ drei Stunden.

Welche Bearbeitungszeit für das gesamte Aufgabenblatt haben Sie zu erwarten?

Lösung $X_1, \ldots, X_6$ seien die Bearbeitungszeiten der Aufgaben, $S_6 = X_1 + \ldots + X_6$ die Gesamtbearbeitungszeit. $\mathbf{E}S_6 = \mathbf{E}X_1 + \ldots \mathbf{E}X_6 = 6 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3) = 9$.

9. (10 Punkte) Sie würfeln mit zwei fairen Würfeln so lange, bis Sie einen Pasch würfeln (ein Pasch liegt vor, wenn beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen). Sie N die Anzahl der Würfe, die Sie benötigen.

   Welchen Erwartungswert hat N?

   Lösung $\mathbf{E}N = \sum_{1 \leq i < \infty} i \cdot P(N = i) = \sum_{0 \leq i < \infty} P(N > i) = \sum_{0 \leq i < \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6$.