Lineare Algebra

Lec 25 KW03

Symmetrische Matrizen

$A^T = A$
reell!

Eigenschaften:

1. Eigenwerte sind reell
2. Eigenvektoren sind orthogonal
(können orthogonal gewählt werden)

1 why real eigenvalues

$$Ax = \lambda x$$

$\Downarrow$ A reell $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ Mult. mit x^{*T} von links

$$Ax^* = \lambda^* x^* \qquad\qquad x^{*T}Ax = \lambda x^{*T}x$$

$\Downarrow$ $A^T = A$

$$x^{*T}A = \lambda^* x^{*T}$$

$\Downarrow$ Mult. mit x von rechts

$$x^{*T}Ax = \lambda^* x^{*T}x \quad \Longrightarrow \quad \lambda x^{*T}x = \lambda^* x^{*T}x$$

$$\Downarrow$$

$$a+ib = \lambda = \lambda^* = a - ib$$

$$\Downarrow$$

λ reell

$\lambda = a$

2 why orthogonal eigenvectors?

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$
$$Ay = \mu y \quad (2)$$

(2) $A^T = A$ mult. m. x v. rechts

(1) mult. m. y^T v. links

$$y^T A x = \mu y^T x \qquad\qquad y^T A x = \lambda y^T x$$

$$\Downarrow$$

$$\mu y^T x = \lambda y^T x$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = \lambda \text{ oder } y^T x = 0$$

Usual : $A = S \Lambda S^{-1}$

symmetric case : $\exists$ orthonormal eigenvectors $\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{Q = [q_1 \cdots q_n]}$

$$Q^T Q = I$$

so: $A = Q \Lambda Q^T$

symmetric!

principal axes theorem

Spectral theorem

Bem.: $\underbrace{x^{*T} x}_{(\text{Length}(x))^2} = [x_1^*, \dots, x_n^*] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum \underbrace{x_i^* x_i}_{|x_i|^2} > 0$

falls $x \neq 0$

$A = A^T \Rightarrow \boxed{A = Q \Lambda Q^T}$

$$[q_1 \cdots q_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$$

Jede symmetrische Matrix ist eine Linearkombination von paarweise orthogonalen Projektionen.

Praxis: Wie findet man Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_{50}$ in der Realität?

$n = 50$

$A = A^T \Rightarrow$ Vorzeichen der Pivot-Elemente

$=$

Vorzeichen der Eigenwerte

(# pos. Pivots = # pos. Eigenwerte)

Zusammen mit Shift-Operation $-\mu I$ ein starkes Werkzeug!

Positiv definite symmetrische Matrizen : alle Eigenwerte sind positiv

($\Leftrightarrow$ alle Pivots sind positiv)

(B) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ symmetrisch ✓

Pivots: $\begin{bmatrix} \boxed{5} & 2 \\ 0 & \boxed{11/5} \end{bmatrix}$ Pivots $> 0 \Rightarrow$ Eigenwerte > 0

$\uparrow$

$\det [\,] = 11 \ldots$

Probe: $(\lambda^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trace} A}}{8\lambda} + \underset{\substack{\uparrow \\ \det A}}{11}) = 0$

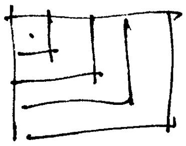
$\lambda = 4 \pm \sqrt{5}$

Lineare Algebra
Lec 25 KW 03

A symmetrisch, pos. definit $\Rightarrow$ $\det A > 0$

nicht umkehrbar! ⓑ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

Es gilt: alle Unterdeterminanten > 0 $\Rightarrow$ A pos. definit.
(sub determinants)



ⓑ $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Lec 27 KW 03

Tests auf positive Definitheit

Tests auf Minima

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

① $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ $\Rightarrow$ pos. definit

② $a > 0$, $ad - b^2 > 0$ $\Rightarrow$ pos. definit

③ pivots: $a > 0$, $\dfrac{ac - b^2}{a} > 0$ $\Rightarrow$ pos. definit

④ (*) $x^T A x > 0$

(7) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & \_ \end{bmatrix}$ ergänze a_{22} so, dass A pos. definit ist.

$$x^T A x = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 2x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 6x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= 2x_1^2 + 12x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= 2 \underbrace{\left(x_1^2 + 6x_1x_2 + \frac{a_{22}}{2}x_2^2\right)}_{\text{„quadratische Form"}} \quad \text{Test (4)} \; > 0$$

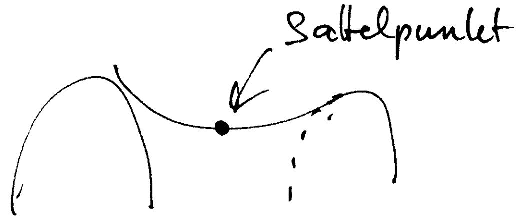
$$(x_1 + 3x_2)^2 = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{22}}{2} > 9$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_{22} > 18}$$

Graphs of $f(x,y) = x^T A x$

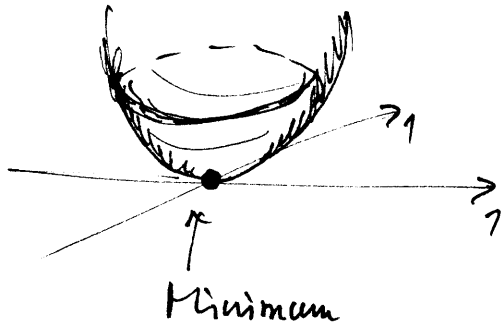
(8) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ...



$\det A < 0$

(B) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$ ...

$\det A = 4$



Analysis 1-dimensional : Minimum $\Leftrightarrow$ 1. Ableitung $= 0$
2. Ableitung > 0

n-dimensional : Minimum $\Leftrightarrow$ $\nabla f = 0$
H_f pos. def.
Hessematrix

(B) (Forts.:)

$$f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$$

$$\begin{bmatrix} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \end{bmatrix} = \quad \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x + 12y \\ 12x + 40y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x, y = 0$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} D_1^2 f(x,y) & D_1 D_2 f(x,y) \\ D_2 D_1 f(x,y) & D_2^2 f(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 40 \end{bmatrix}$$

quadratische Ergänzung: (B) (Farbe)

$$f(x,y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$$

$$= 2x^2 + 12xy + 18y^2 + 2y^2$$

$$= \underset{\text{pivot}}{2}(x + \underset{\substack{\text{Elimination-}\\ \text{factor}}}{3}y)^2 + \underset{\text{pivot}}{2}y^2$$

Elimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U}$$

pivots

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Elimination factor.

(B) $(n=3)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

pos. definit? ja (Sub-Determinanten-Test) (Sub) det.: 2, 3, 4

Pivots: $2, 3/2, 4/3$

Eigenwerte: $\underset{\lambda_1}{2-\sqrt{2}}, \underset{\lambda_2}{2}, \underset{\lambda_3}{2+\sqrt{2}}$

$$x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$= 2(x_1 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 +$$

$$+ 2(x_3 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 + x_2^2 > 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

$Q \Lambda Q^T$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ +1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$$