Lineare Algebra

Lec 23 KW 51

Differentialgleichungssysteme (linear, 1. Ordnung)

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \text{Anfangswertproblem} \begin{cases} \dot{u}(t) = A\,u(t) \\ u(0) = u_0 \text{ (vorgegeben)} \end{cases}$$

Anfangswert

"no theory without praxis ..." (DEK)

(B) $\dot{u}_1 = -u_1 + 2u_2$

$\dot{u}_2 = u_1 - 2u_2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (singulär!)

Lösung: $u(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Probe: $\dot{u}(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\,u(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 0 - \frac{1}{3}e^{-3t}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

"no praxis without theory!" (DEK)

Betrachte Fall $n=1$: $\dot{u} = a u$ $\quad a \in \mathbb{R},\ u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$

Lösung: $u(t) = u_0 e^{at}$

Fall $n \geq 1$: $$u(t) = \underbrace{\exp(t\overset{\text{Matrix}}{\overset{\downarrow}{A}})}_{\text{Matrix}} \underbrace{u_0}_{\text{Vektor}}$$

mit
$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (S \Lambda S^{-1})^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S \Lambda^k S^{-1}$$
$$= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k \right) S^{-1}$$
$$= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \right) S^{-1}$$
$$= S \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} S^{-1}$$
$$= S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Lineare Algebra
Lec23 KW51

$$u_0 = Sc$$
$\uparrow$ geeignet

$$u(t) = e^{tA} u_0$$
$$= S e^{\Lambda t} S^{-1} S c$$
$$= S e^{\Lambda t} c$$

ausführlich: $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$

$u(0) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = u_0$

---

zurück zum (B)

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Eigenwerte
$\lambda_1 = 0$ (weil A singulär)

$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -3$ (Spur von $A = -3$)

$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2$, d.h. $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = -\frac{1}{3}$

nun: $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$