Lineare Algebra

Lec 22 KW51

Sei A $n \times n$ – Matrix mit k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $(k \leq n)$ und zugehörigen Eigenvektoren $x_1, \dots, x_k$.

"Eigenvektor-Matrix" $S = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix}$

$$AS = A\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & \cdots & Ax_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_k x_k \end{bmatrix} = S\Lambda$$

mit $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}$

Diagonalmatrix

$$\boxed{AS = S\Lambda}$$

Sei ab jetzt $k = n$.

S ist invertierbar und $\boxed{A = S\Lambda S^{-1}}$

$n \times n$

Diagonalisierung von A

Anwendung auf Potenzen von A:

$$A^k = (S\Lambda \underbrace{S^{-1})(S}_{I}\Lambda \underbrace{S^{-1})\dots}_{I} \underbrace{(S}_{I}\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^k S^{-1}$$

$$\boxed{A^k S = S\Lambda^k}$$

$$\boxed{A^k x_j = \lambda_j^k x_j} \qquad j = 1, \dots, n$$

(B) Fibonacci-Zahlen

$$F_0 = 0 , \quad F_1 = 1 , \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$(F_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A^k$$

Beh.: $A^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \qquad k = 1, 2, \dots$

Bew.: Induktion: $k = 1$ ✓

Ind.-Schritt: $k \rightsquigarrow k+1$

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} \checkmark$$

Fragen: Wie wächst F_k ?, $F_{100} = ?$

Antwort mit Eigensystem.

Eigenwerte: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} , \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Zugeh.: Eigenvektoren: $\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{bmatrix} x_1 = 0 : \quad x_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ EV

$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 1 \\ 1 & -\lambda_2 \end{bmatrix} x_2 = 0 : \quad x_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ EV

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$A^k = S \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{k+1} = \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \underset{\substack{\uparrow \\ |\lambda_2| < 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}}}{\approx} \sqrt{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$$

Differenzengleichungen

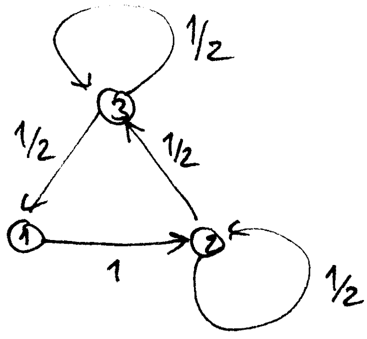
$$u_0 \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad u_k = A^k u_0$$

$$A = S \Lambda S^{-1}, \quad u_0 = Sc = \underbrace{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n}_{\text{Eigenvektordarstellung von } u_0}$$

$$u_k = A^k u_0 = \underbrace{A^k S}_{S\Lambda^k} c = S \Lambda^k c = c_1 \lambda_1^k x_1 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n$$

(B) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Stochastische Matrix



$u_0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

Start überall gleich wahrscheinlich

$u_k = M^k u_0$ Wahrsch.-Verteilung nach k Schritten.

Frage: Existiert $\lim\limits_{k\to\infty} M^k u_0 =: u_\infty$?

Falls ja: $M u_\infty = u_\infty$ (Stationarität)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2-\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \tfrac{1}{4} = -\lambda^3+\lambda^2-\tfrac{1}{4}\lambda+\tfrac{1}{4}$$
$$= -(\lambda-1)\left(\lambda^2+\tfrac{1}{4}\right)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{i}{2},\ \lambda_3 = -\frac{i}{2}$.

Eigenvektor zu λ_1: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$u_k = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + c_3 \lambda_3^k x_3$$
$$= c_1 \cdot 1^k \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \left(\tfrac{i}{2}\right)^k x_2 + c_3\left(-\tfrac{i}{2}\right) x_3$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\longrightarrow c_1 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 + 0$$

$\Rightarrow c_1 = \frac{2}{5}$ und $u_\infty = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$.