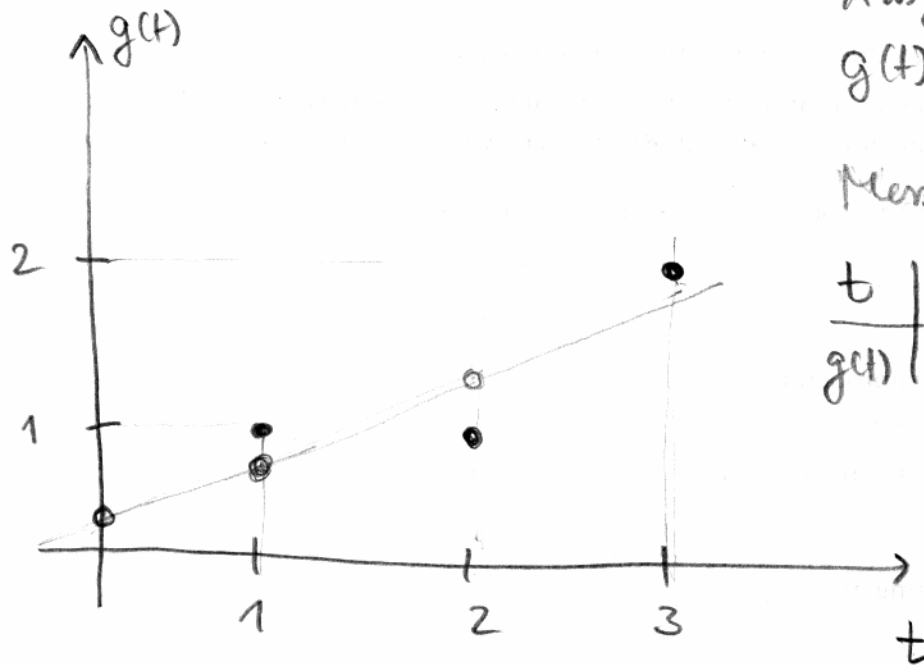


Methode der kleinsten Quadrate, Projektion

ⓑ



Ausgleichsgerade

$$g(t) = C + Dt$$

\uparrow \uparrow
 zu bestimmen

Messungen:

t	1	2	3
g(t)	1	1	2

Lineare Gleichung (unlösbar)

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 A \quad \times \quad b
 \end{array}$$

Aufgabe: finde \hat{x} mit minimalem Fehler

$$\left\| \underbrace{A \hat{x}}_p - b \right\|^2 \quad A$$

Analytisch:

$$\begin{aligned}\|A\hat{x} - b\|^2 &= (A\hat{x} - b)^T (A\hat{x} - b) \\ &= \hat{x}^T A^T A \hat{x} - \hat{x}^T A^T b - \underbrace{b^T A \hat{x}}_{\hat{x}^T A^T b} + b^T b\end{aligned}$$

$$\hat{x}^T A^T A \hat{x} = \sum_j \left(\sum_k A_{jk} x_k \right)^2$$

$$D_i \hat{x}^T A^T A \hat{x} = \sum_j 2 \left(\sum_k A_{jk} x_k \right) \cdot A_{ji}$$

*i-te partielle
Ableitung*

$$= 2 \sum_j \sum_k A_{ji} A_{jk} x_k$$

$$= (2 A^T A \hat{x})_i$$

$$D_i \hat{x}^T A^T b = (A^T b)_i$$

*i-te partielle
Ableitung*

insgesamt gilt für $e(\hat{x}) = \|A\hat{x} - b\|^2$ die Minimums-
bedingung

$$\nabla e(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A^T A \hat{x} = A^T b$$

Normalengleichung

Linear Algebra
Lec 16 KW 48

Seite 3

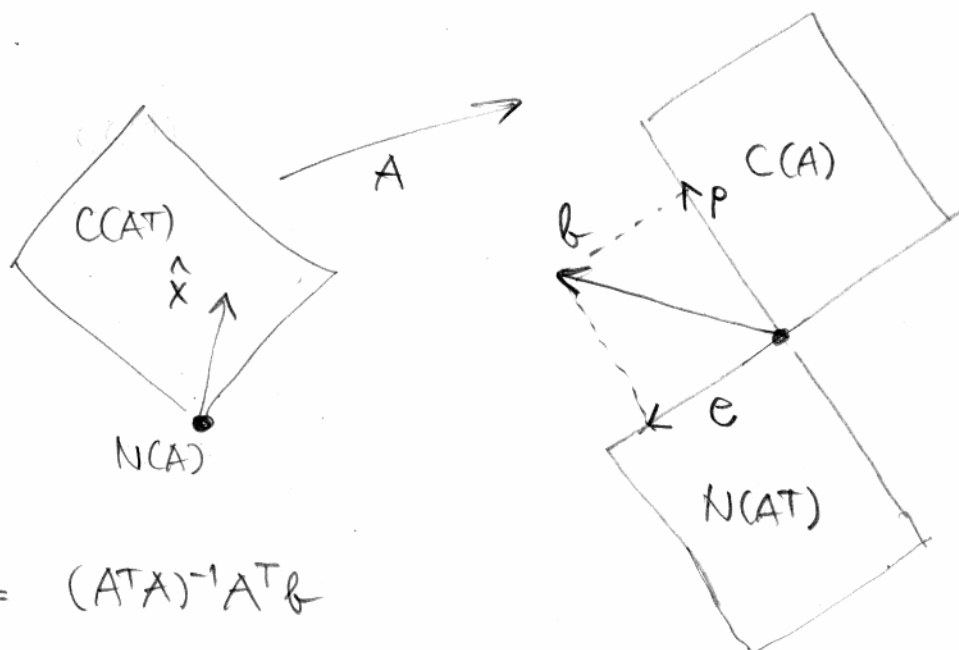
$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 14 & 9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \hat{c} = \frac{1}{3} \\ 2\hat{d} = 1 \Rightarrow \hat{d} = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t$$

t	1	2	3
$\hat{g}(t)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{6}$
e	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$



$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$p = A (A^T A)^{-1} A^T b$$