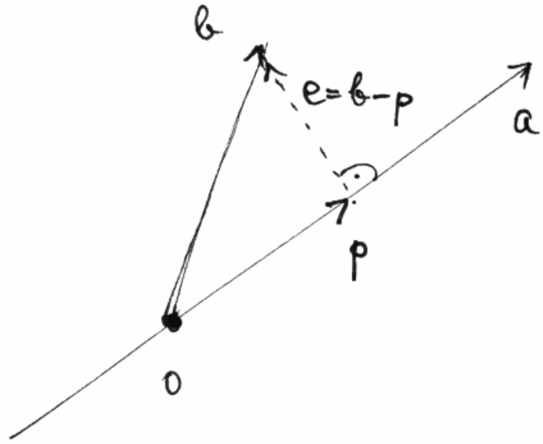
Lektion 15

Projektion auf eine Gerade



finde $p = xa$ derart, dass $\|e\|$ minimal ist.

Pythagoras: $e \perp a$

LinAlg: $a^Te = 0$

$$a^T(b - xa) = 0$$

löse nach x auf: $x\, a^Ta = a^Tb$

$$x = \frac{a^Tb}{a^Ta}$$

$$p = ax = a\frac{a^Tb}{a^Ta}$$ (hängt linear von b ab!)

Wie lautet die Projektionsmatrix P, für die $Pb = p$ ist?

$$P = \frac{aa^T}{a^Ta}$$

Eigenschaften:

$C(P) = \{ca \mid c \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{rank}(P) = 1$, P ist symmetrisch,

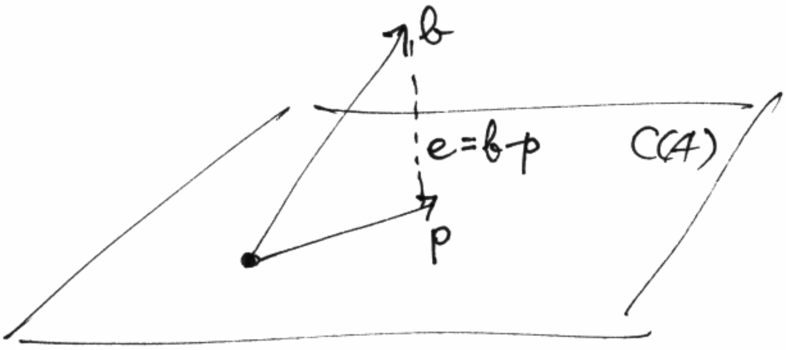
$$P^2 = P$$

Lineare Algebra
Lektion 15

Projektion auf C(A)

Motivation: $Ax = b$ nicht immer lösbar.

Was tun? Löse $A\hat{x} = p$, p Projektion von b auf $C(A)$)



$e \perp$ jede Spalte von A

$e \perp C(A)$

$$A^T(b-p) = 0$$

$$p = A\hat{x}$$

$$\Rightarrow \quad A^T(b - A\hat{x}) = 0$$

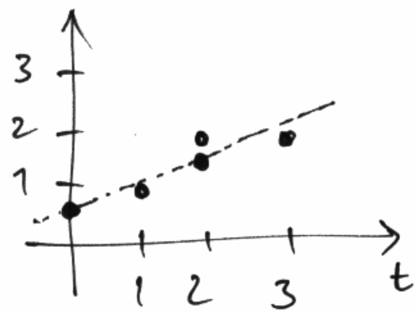
$$A^TA\hat{x} = A^Tb$$

$$\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$p = A(A^TA)^{-1}A^Tb$$

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T$$

Eigenschaften von P: $P^T = P$ (Symmetrie), $P^2 = P$, B



Finde Ausgleichsgerade $C + Dt = b$

Daten:

t	1	2	3
b	1	2	2

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \overset{x}{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}} = \overset{b}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

nicht lösbar

löse $A^T A \hat{x} = A^T b$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \quad (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} + \hat{D} t = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} t$$